Georg Cantor

Contribuzione al fondamento della teoria degli insiemi transfiniti

www.liberliber.it

QUESTO E-BOOK:

TITOLO: Contribuzione al fondamento della teoria degli insiemi transfiniti
AUTORE: Cantor, Georg
TRADUTTORE: Gerbaldi, Francesco (Da Mathematische Annalen, Bd. XLVI, p. 481-512)
CURATORE:

NOTE: Il testo è presente in formato immagine in Google Books (https://books.google.it/books?pg=PP7&id=LVZLAAAAMAAJ&hl=it#v=onepage&q&f=false)

CODICE ISBN E-BOOK: n. d.

COPERTINA: n. d.

TRATTO DA: Contribuzione al fondamento della teoria degli insiemi transfiniti / di Georg Cantor. - In: Rivista di matematica. - Torino : Fratelli Bocca,

1895. - V. 5, p. 129-162.

CODICE ISBN FONTE: n. d.

1a EDIZIONE ELETTRONICA DEL: 2 marzo 2024

INDICE DI AFFIDABILITÀ: 1
0: affidabilità bassa
1: affidabilità standard
2: affidabilità buona
3: affidabilità ottima

SOGGETTO:
MAT000000 MATEMATICA / Generale
MAT028000 MATEMATICA / Teoria degli Insiemi
MAT039000 MATEMATICA / Saggi

CDD:
511.322 LOGICA MATEMATICA. TEORIA DEGL'INSIEMI

DIGITALIZZAZIONE:
Gianluca Crocivera

REVISIONE:
Roberto Rogai, Roberto.Rogai@alice.it

IMPAGINAZIONE:
Gianluca Crocivera
Roberto Rogai, Roberto.Rogai@alice.it

PUBBLICAZIONE:
Catia Righi, catia_righi@tin.it
Claudia Pantanetti, liberabibliotecapgt@gmail.com
Gabriella Dodero

Liber Liber

Se questo libro ti è piaciuto, aiutaci a realizzarne altri. Fai una donazione: www.liberliber.it/online/aiuta.

Scopri sul sito Internet di Liber Liber ciò che stiamo realizzando: migliaia di ebook gratuiti in edizione integrale, audiolibri, brani musicali con licenza libera, video e tanto altro: www.liberliber.it.

Indice generale

ARTICOLO PRIMO[1]

> «Hypotheses non fingo».(1*)
> «Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tamquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus».(2*)
> «Veniet tempus, quo ista quae nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris aevi diligentia».(3*)

§ 1. La nozione di potenza o il numero cardinale.

Per «*insieme*» (Menge) noi intendiamo ogni riunione M in un tutto di determinati e ben distinti oggetti m dati dai nostri sensi o dal nostro pensiero (che son detti gli elementi di M). Ciò noi esprimiamo in segni con:

(1) $$M=\{m\}.$$

La riunione in un solo di più insiemi $M, N, P, \ldots,$ che non hanno elementi comuni, è da noi rappresentata con

(2) $$(M, N, P, \ldots).$$

1 Dai *Mathematische Annalen,* Bd. XLVI, pp. 481-512; traduzione di F. GERBALDI. *(Nota per l'edizione elettronica Manuzio: l'edizione originale tedesca non possiede alcuna nota, diversamente da questa traduzione italiana; quelle che in questo testo sono riportate come note, nella versione originale sono semplicemente delle aggiunte alla fine di alcuni capitoli, in carattere leggermente più piccolo).*

Gli elementi di questo insieme sono adunque gli elementi di *M*, di *N*, di *P*, ecc. presi insieme.

«*Parte*» o «*insieme parziale*» d'un insieme *M* chiamiamo ogni altro insieme M_1 i cui elementi sono ad un tempo elementi di *M*.

Se M_2 è una parte di M_1 ed M_1 una parte di *M*, è anche M_2 una parte di *M*.

Ad ogni insieme spetta una determinata «*potenza*» (Mächtigkeit), che noi chiamiamo anche il suo «*numero cardinale*».

Potenza o numero cardinale di M chiamiamo quell'idea generale, che per mezzo della nostra attiva facoltà di pensare si deduce dall'insieme M, facendo astrazione dalla natura dei suoi diversi elementi e dall'ordine con cui vien dato. Il risultato di questo doppio atto di astrazione, il numero cardinale o la potenza di *M*, viene da noi indicato con

$$(3) \qquad \overline{\overline{M}} \; .$$

Siccome da ogni singolo elemento *m*, quando si fa astrazione dalla sua natura, nasce un'*unità*, così il numero cardinale $\overline{\overline{M}}$ è esso stesso un determinato insieme costituito di pure unità, che ha esistenza come imagine intellettuale o proiezione nel nostro animo dell'insieme dato *M*.

Diciamo equivalenti due insiemi M ed N e denotiamo ciò con

$$(4) \qquad M \sim N \;\; ovvero \;\; N \sim M \;\; ,$$

quando è possibile con una legge metterli in una siffatta reciproca relazione, che ad ogni elemento di uno di essi corrisponda uno ed un solo elemento dell'altro. Ad ogni parte M_1 di *M* corrisponde allora una determinata equivalente parte N_1 di *N* ed inversamente.

Avendosi una tal legge per riferire tra loro due insiemi equivalenti, essa si può in varie maniere modificare (escluso il caso che ciascuno degli insiemi consti di un solo elemento). In particolare si può sempre fare in modo che ad un determinato elemento m_0 di *M* corrisponda un elemento dato qualsiasi n_0 di *N*. Infatti, se gli elementi m_0 ed n_0 già non si corrispondono nella legge iniziale, ma all'elemento m_0 di *M* corrisponde l'elemento n_1 di *N*, ed all'elemento n_0 di *N* l'elemento m_1 di M, basta assumere come legge modificata quella per cui diventano elementi corrispondenti dei due insiemi m_0 ed n_0, e così pure m_1 ed n_1, e per tutti gli altri elementi si conserva la primitiva legge; a questo modo si ottiene lo scopo voluto.

Ogni insieme è equivalente a sè stesso:

(5) $$M \sim M \; .$$

Se due insiemi sono equivalenti ad un terzo, essi sono anche equivalenti tra loro:

(6) $$\text{da } M \sim P \text{ e } N \sim P \text{ segue } M \sim N \; .$$

È di fondamentale importanza questo che *due insiemi M ed N hanno lo stesso numero cardinale allora e solo allora quando essi sono equivalenti:*

(7) *da* $M \sim N$ *segue* $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$,

e

(8) *da* $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$ *segue* $M \sim N$.

La equivalenza degli insiemi è dunque il criterio necessario e sufficiente per l'eguaglianza dei loro numeri cardinali.

Infatti per la definizione data della potenza il numero cardinale $\overline{\overline{M}}$ rimane invariato, quando in luogo di un elemento, o anche in luogo di più ed eziandio di tutti gli elementi m di M si sostituisce un altro oggetto, uno per elemento. Ora, se $M \sim N$, si può stabilire una legge tale che M ed N siano reciprocamente ed univocamente riferiti tra loro; corrisponda per essa all'elemento m di M l'elemento n di N. Noi possiamo allora in luogo di ogni elemento m di M pensare sostituito il corrispondente elemento n di N, e così M si trasforma in N senza alterazione del numero cardinale; si ha adunque

$$\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}} .$$

Il teorema inverso si deduce dall'osservazione che tra gli elementi di M e le varie unità del suo numero cardinale $\overline{\overline{M}}$ sussiste una relazione reciprocamente univoca; perché, come vedemmo, $\overline{\overline{M}}$ vien fuori in certa maniera da M, col dedurre da ogni elemento m di M una determinata unità di $\overline{\overline{M}}$; quindi possiamo dire che

(9) $$M \sim \overline{\overline{M}} .$$

Similmente è $N \sim \overline{\overline{N}}$. Dunque, se $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, segue dalla (6)

$M \sim N$.

Rileviamo ancora il teorema seguente, che è conseguenza immediata della nozione dell'equivalenza:

Se M, N, P, ... sono insiemi, che non hanno elementi comuni, ed *M', N', P' , ... sono insiemi a quelli corrispondenti, ancora senza elementi comuni, e se si ha*

$$M \sim M', N \sim N', P \sim P', \ldots,$$

si ha pur sempre

$$(M, N, P, \ldots) \sim (M', N', P', \ldots) .$$

§ 2. Il "maggiore„ ed il "minore„ per le potenze.

Se per due insiemi *M* ed *N* coi numeri cardinali $a=\overline{\overline{M}}$ e $b=\overline{\overline{N}}$ sono soddisfatte le due condizioni:

1) *non esiste alcuna parte di M, che sia equivalente ad N,*

2) *esiste una parte N_1 di N tale che* $N_1 \sim M$ *,*

è anzitutto evidente che esse restano soddisfatte, quando *M* ed *N* si sostituiscano con due insiemi a quelli equivalenti *M'* ed *N'; quelle condizioni esprimono adunque una determinata relazione che passa fra i numeri cardinali a e b.*

Inoltre *è esclusa l'equivalenza di M ed N, e però l'eguaglianza di a e b;* perché, se fosse $M \sim N$, essendo $N_1 \sim M$, sarebbe anche $N_1 \sim N$, ed in virtù di $M \sim N$ dovrebbe anche esistere una parte M_1 di M tale che $M_1 \sim M$, e quindi sarebbe anche $M_1 \sim N$, ciò che contradice alla condizione 1).

In terzo luogo *la relazione di a a b è tale, che è resa impossibile la stessa relazione di b ad a;* perchè, se in 1) e 2) si scambiano fra loro M ed N, ne nascono altre due condizioni che sono con quelle in contradizione.

Noi esprimiamo la relazione di a a b caratterizzata dalle 1) *e* 2) *col dire che: a è minore di b, ovvero anche b è maggiore di a;* in segni:

(1) $a<b$ ovvero $b>a$.

Si dimostra facilmente, che

(2) se $a<b$, $b<c$, si ha $a<c$.

Similmente segue senz'altro da quella definizione che *se* P_1 *è parte d'un insieme* P, *da* $a<\overline{\overline{P_1}}$ *segue sempre anche* $a<\overline{\overline{P}}$ *, e da* $\overline{\overline{P}}<b$ *segue sempre anche* $\overline{\overline{P_1}}<b$.

Noi abbiamo visto che delle tre relazioni

$$a = b, \quad a<b, \quad a>b$$

ognuna esclude le altre due. Ma non è affatto evidente, ed a questo punto del nostro sviluppo a mala pena si potrebbe dimostrare, che *per due numeri cardinali qualunque a e b deve necessariamente aver luogo una di quelle tre relazioni* [2].

2 Più tardi, appena avremo dato uno sguardo alla successione crescente dei numeri cardinali transfiniti, ed avremo acquistato cognizione della loro connessione, risulterà la verità del teorema:

A. *«Se a e b sono due numeri cardinali qualunque, si ha: o a=b, o a<b, o*

§ 3. L'addizione e moltiplicazione dei numeri cardinali.

La riunione di due insiemi *M* ed *N*, che non hanno elementi comuni fu denotata al § 1, (2) con (*M, N*). Noi lo diciamo «*insieme somma* (Vereinigungsmenge) *di M ed N*».

Se *M'* ed *N'* sono altri due insiemi senza elementi comuni, ed è $M \sim M'$, ed $N \sim N'$, vedemmo che anche

$$(M, N) \sim (M', N') .$$

Quindi segue che il numero cardinale di (*M, N*) dipende soltanto dai numeri cardinali $\overline{\overline{M}} = a$ e $\overline{\overline{N}} = b$.

Ciò conduce alla definizione della somma di *a* e *b*, che si ha ponendo

(1) $$a + b = \overline{\overline{(M, N)}} .$$

Siccome nella nozione di potenza si fa astrazione dall'ordine degli elementi, così segue senz'altro:

---

a>*b*».

Da questo teorema si possono molto semplicemente dedurre i seguenti, dei quali tuttavia non dovremo presentemente fare alcun uso:

B. «Se due insiemi *M* ed *N* sono cosifatti che *M* è equivalente ad una parte N_1 di *N*, ed *N* è equivalente ad una parte M_1 di *M*, sono anche *M* ed *N* equivalenti».

C. «Se M_1 è una parte d'un insieme *M*, M_2 una parte dell'insieme M_1, e se *M* ed M_2 sono equivalenti, anche M_1 è equivalente agli insiemi *M* ed M_2».

D. «Se per due insiemi *M* ed *N* è soddisfatta la condizione che *N* non è equivalente nè ad *M* stesso nè ad una parte di *M*, vi è una parte N_1 di *N* che è equivalente ad *M*».

E. «Se due insiemi *M* ed *N* non sono equivalenti, e vi è una parte N_1 di *N* che è equivalente ad *M*, non vi è alcuna parte di *M* equivalente ad *N* ».

(2) $$a+b=b+a\ ,$$

e per tre numeri cardinali *a, b, c*:

(3) $$a+(b+c)=(a+b)+c\ .$$

Passiamo alla moltiplicazione. Ogni elemento *m* di un insieme *M* si può combinare con ogni elemento *n* di un altro insieme *N* in un nuovo elemento (*m, n*);(4*) per l'insieme di tutte queste combinazioni (*m, n*) adottiamo la notazione $(M.N)$, e lo chiamiamo «*insieme prodotto* (Verbindungsmenge) di *M* ed *N*». Si ha adunque

(4) $$(M.N)=\{(m,n)\}\ .$$

È facile persuadersi che anche la potenza di $(M.N)$ dipende solo dalle potenze $\overline{\overline{M}}=a$ e $\overline{\overline{N}}=b$; perché se si sostituiscono agli insiemi *M* ed *N* insiemi ad essi equivalenti

$$M'=\{m'\} \text{ ed } N'=\{n'\}\ ,$$

e si considerano *m, m'* come elementi corrispondenti e così pure *n, n'*, l'insieme

$$(M'.N')=\{(m',n')\}$$

viene messo in relazione reciprocamente univoca a (*M* . *N*), quando si riguardino come elementi corrispondenti (*m, n*) e (*m', n'*); si ha adunque

(5) $$(M'.N')\sim(M.N)\ .$$

Ora noi definiamo il prodotto $a.b$ per mezzo dell'equazione

(6) $$a . b = \overline{\overline{(M . N)}} .$$

Un insieme col numero cardinale $a . b$ si può ancora costruire con due insiemi di numeri cardinali a e b colla regola seguente: si parta dall'insieme N ed in esso si sostituisca ad ogni elemento n un insieme $M_n \sim M$, indi si riuniscano in un tutto S gli elementi di tutti questi insiemi M_n; si vede facilmente che

(7) $$S \sim (M . N) ,$$

quindi

$$\overline{\overline{S}} = a . b .$$

Infatti, stabilita una legge qualunque per riferire tra loro i due insiemi equivalenti M ed M_n, si denoti con m_n l'elemento di M_n corrispondente all'elemento m di M, e si ha

(8) $$S = \{m_n\} ,$$

e perciò gli insiemi S ed $(M . N)$ si possono mettere in relazione reciproca e univoca, riguardando m_n e (m, n) come elementi corrispondenti.

Dalle nostre definizioni seguono facilmente i teoremi:

(9) $$a . b = b . a ,$$

(10) $$a . (b . c) = (a . b) . c ,$$

(11) $$a (b + c) = a b + a c ,$$

perchè

$$(M . N) \sim (N . M) ,$$

$$(M . (N . P)) \sim ((M . N) . P) ,$$
$$(M . (N , P)) \sim ((M . N) , (M . P)) .$$

L'addizione e la moltiplicazione dei numeri cardinali soddisfano adunque alle leggi commutativa, associativa e distributiva.

§ 4. Elevazione a potenza dei numeri cardinali.

Per un *coprimento* (Belegung) *dell'insieme N cogli elementi dell'insieme M,* o più semplicemente *coprimento di N con M* intendiamo una legge, colla quale ad ogni elemento n di N si congiunge un determinato elemento di M, potendo uno stesso elemento di M venire più volte impiegato. L'elemento di M congiunto con n è in certa maniera una funzione ad un sol valore di n e però si può rappresentare ad es. con $f(n)$, che diremo *funzione di ricoprimento*;(5*) il corrispondente coprimento di N si chiama $f(N)$.

Due coprimenti $f_1(N)$ e $f_2(N)$ si dicono allora e solo allora eguali, quando *per tutti gli elementi n di N* è soddisfatta la equazione

(1) $$f_1(n)=f_2(n) ,$$

di guisa che se anche per un solo particolare elemento $n=n_0$ questa equazione non sussiste, $f_1(N)$ e $f_2(N)$ sono da considerarsi come coprimenti diversi di N.

A mo' d'esempio, essendo m_0 un particolare elemento di M, può stabilirsi che per tutti gli n sia

$$f(n) = m_0\,;$$

questa legge costituisce un particolare coprimento di N con M.

Un'altra sorta di coprimento si ottiene, se m_0, m_1 sono due particolari e diversi elementi di M, ed n_0 un particolare elemento di N, quando si pone:

$$f(n_0)=m_0\,,$$

$$f(n)=m_1$$

per tutti gli n diversi da n_0.

La totalità dei diversi coprimenti di N con M forma un determinato insieme cogli elementi $f(N)$, che noi chiamiamo l'*insieme dei coprimenti di N con M* e denotiamo con $(N\,|\,M)$. Si ha dunque:

(2) $$(N\,|M)=\{\,f\,(N\,)\}\ .$$

Se $M\sim M'$ ed $N\sim N'$, si vede facilmente che anche

(3) $$(N\,|M)\sim(N'\,|M')\ .$$

Il numero cardinale di (N | M) dipende dunque soltanto dai numeri cardinali $\overline{\overline{M}}=a$ e $\overline{\overline{N}}=b$; esso ci serve per definire la potenza a^b :

(4) $$a^b=\overline{\overline{(N\,|M)}}\ .$$

Per tre insiemi qualunque M, N, P si dimostrano facilmente i teoremi

(5) $((N \mid M) \,.\, (P \mid M)) \sim ((N\,, P) \mid M)$, (6*)

(6) $((P \mid M) \,.\, (P \mid N)) \sim (P \mid (M \,.\, N))$,

(7) $(P \mid (N \mid M)) \sim ((P \,.\, N) \mid M)$,

dai quali, se si pone $\overline{\overline{P}}=c$, in virtù della (4) e del § 3, si deducono i teoremi seguenti per tre numeri cardinali qualunque a, b, c:

(8) $a^b \,.\, a^c = a^{b+c}$,

(9) $a^c \,.\, b^c = (a \,.\, b)^c$,

(10) $(a^b)^c = a^{b.c}$. [3]

3 Quanto importanti e feconde siano queste semplici formole, estese alle potenze, si riconosce dal seguente esempio:

Denotiamo con o la potenza del continuo lineare X (cioè dell'insieme X di tutti i numeri reali x che sono ≥ 0 e ≤ 1.(7*) Si stabilisce facilmente che essa si può rappresentare colla formola

(11) $o = 2^{\aleph_0}$

dove $\aleph_0$ ha il significato che viene spiegato al § 6.

Infatti per la (4) $2^{\aleph_0}$ è niente altro che la potenza di tutte le rappresentazioni dei numeri x nel sistema duale

(12) $x = \frac{f(1)}{2^1} + \frac{f(2)}{2^2} + \ldots + \frac{f(\nu)}{2^\nu} + \ldots$ (8*)

(dove $f(\nu)=0$ oppure 1).

Se qui osserviamo che ogni numero x vien rappresentato in un sol modo, fatta eccezione dei numeri $x = \frac{2\nu+1}{2^\mu} < 1$,(9*) i quali vengono rappresentati in due modi, denotando con $\{s_\nu\}$ la totalità «numerabile» di questi ultimi, abbiamo anzitutto

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{(\{s_\nu\}\,, X)}} \text{ .(10*)}$$

Ora si sopprima da X un insieme qualunque «numerabile» $\{t_\nu\}$ e si denoti il resto con X_1, si avrà:

§ 5. I numeri cardinali finiti.

Vogliamo anzitutto mostrare, come i principî esposti, su cui baseremo più tardi la teoria dei numeri cardinali infiniti attuali o transfiniti, offrano anche il fondamento

---

$$X=(\{t_\nu\}, X_1)=(\{t_{2\nu-1}\}, \quad \{t_{2\nu}\}, \quad X_1),(11^*)$$
$$(\{s_\nu\}, X)=(\quad \{s_\nu\}, \quad \{t_\nu\}, \quad X_1),$$
$$\{t_{2\nu-1}\}\sim\{s_\nu\}, \quad \{t_{2\nu}\}\sim\{t_\nu\}, \quad X_1\sim X_1,$$

quindi

$$X \sim (\{s_\nu\}, X),$$

dunque (§ 1)

$$2^{\aleph_0}=\overline{\overline{X}}=o\,.$$

Dalla (11), quadrando,(12*) per la (6) del § 6, segue

$$o\,.\,o=2^{\aleph_0}.\,2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0+\aleph_0}=2^{\aleph_0}=o\;,$$

e quindi continuando a moltiplicare per o

(13) $$o^{\nu}=o\;,$$

dove ν è un numero cardinale finito qualunque.

Innalzando ambi i membri della (11) alla potenza $\aleph_0$ si ottiene

$$o^{\aleph_0}=\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\cdot\aleph_0}\,,$$

e, siccome per la (8) del § 6 $\aleph_0\,.\,\aleph_0=\aleph_0$, così si ha

(14) $$o^{\aleph_0}=o.$$

Le formole (13) e (14) non hanno altro significato che questo: «Il continuo ν-dimensionale e così pure il continuo $\aleph_0$-dimensionale hanno la potenza del continuo unidimensionale». E così *in queste poche righe, colle formole fondamentali del calcolo dei numeri cardinali* abbiamo in modo puramente algebrico ricavato *tutto il contenuto* del lavoro consegnato nel T. 84 del *Crelle's Jour-*

più naturale, più breve e più rigoroso della teoria dei numeri finiti.

Ad un unico oggetto e_0, volendolo considerare come un insieme $E_0 = (e_0)$, corrisponde come numero cardinale ciò che noi diciamo «uno» e denotiamo con 1; abbiamo:

(1) $$1 = \overline{\overline{E_0}}\ .$$

Aggiungiamo ora ad E_0 un altro oggetto e_1, l'insieme somma chiamisi E_1, per guisa che

(2) $$E_1 = (E_0, e_1) = (e_0, e_1)\ .$$

Il numero cardinale di E_1, dicesi «due» e si rappresenta con 2:

(3) $$2 = \overline{\overline{E_1}}\ .$$

Aggiungendo nuovi elementi noi otteniamo la serie degli insiemi

$$E_2 = (E_1, e_2), \quad E_3 = (E_2, e_3), \ldots,$$

che ci forniscono in successione illimitata e l'un dopo l'altro i rimanenti *numeri cardinali finiti* rappresentati con 3, 4, 5, ... L'impiego che qui facciamo degli stessi numeri come indici, è giustificato da ciò che un numero viene a questo modo adoperato soltanto dopo che esso è stato definito come numero cardinale. Se si intende che ν-1 denoti il numero che in quella serie precede immediatamente il numero ν, abbiamo

(4) $$\nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1}\ ,$$

---

nal, pag. 242.

(5) $$E_\nu = (E_{\nu-1}, e_\nu) = (e_0, e_1, \ldots, e_\nu) \quad .$$

Dalla definizione di somma del § 3 segue:

(6) $$\overline{\overline{E}}_\nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1} + 1 \ ,$$

cioè ogni numero cardinale finito (escluso 1) è la somma di quello che immediatamente lo precede e di 1.

Per i nostri sviluppi sono fondamentali i seguenti tre teoremi:

A. *«I termini della serie illimitata dei numeri cardinali finiti*

$$1, 2, 3, \ldots \nu, \ldots$$

sono tutti fra loro diversi (cioè non è soddisfatta la condizione di equivalenza per i corrispondenti insiemi stabilita al § 1)*»*.

B. *«Ognuno di questi numeri* ν *è maggiore di quelli che lo precedono e minore di quelli che lo seguono* (§ 2)*»*.

C. *«Non esiste alcun numero cardinale che rispetto alla sua grandezza stia tra due termini successivi* ν *e* $\nu+1$ (§ 2)*»*.

Le dimostrazioni di questi teoremi si fondano sui seguenti D ed E, di cui perciò ci occuperemo primieramente.

D. *«Se M è un insieme cosifatto che non ha potenza eguale a quella di alcuno dei suoi insiemi parziali,(13*) anche l'insieme (M, e), che nasce da M aggiungendovi un unico elemento e,(14*) ha la stessa proprietà di non avere potenza uguale a quella di alcuno dei suoi insiemi* *parziali».*

E. *«Se N è un insieme col numero cardinale finito v, ed N_1 uno qualunque degli insiemi parziali di N, il numero cardinale di N_1 è uguale ad uno dei numeri precedenti* $1, 2, 3, \ldots \nu - 1$*».*

Dimostrazione di D.(15*)−Supponiamo che l'insieme (*M, e*) abbia potenza uguale a quella di uno dei suoi insiemi parziali, che chiameremo *N*; due casi sono a distinguersi, che conducono entrambi all'assurdo:

1) L'insieme *N* contiene *e* come elemento. Sia *N* = (M_1, *e*); allora M_1 è una parte di *M,* perché *N* è una parte di (*M, e*). Come vedemmo al § 1, la legge di corrispondenza dei due insiemi equivalenti (*M, e*) e (M_1, *e*) si può modificare in guisa che all'elemento *e* dell'uno corrisponda lo stesso elemento *e* dell'altro; ma allora anche *M* ed M_1 risultano riferiti tra loro in modo reciprocamente univoco. Ora ciò contradice all'ipotesi che *M* non ha la stessa potenza della sua parte M_1.

2) L'insieme *N* non contiene *e* come elemento. Allora *N* o è *M* o è una parte di *M*. Supponiamo che per la legge di corrispondenza posta a fondamento tra (*M, e*) ed N all'elemento *e* del primo corrisponda l'elemento *f* del secondo. Sia *N* = (M_1, *f*); allora sarà contemporaneamente l'insieme *M* posto in relazione reciprocamente univoca con M_1; ma M_1 essendo parte di *N* è in ogni caso parte di *M*. Quindi anche qui *M* sarebbe equivalente ad una sua parte, ciò che è contrario all'ipotesi.

Dimostrazione di E.−Supporremo il teorema vero fino a un certo ν, indi concluderemo che esso sussiste per il successivo $\nu+1$.(16*)

Per insieme col numero cardinale $\nu+1$ assumiamo $E_\nu=(e_0, e_1, \dots e_\nu)$; se il teorema per questo è vero, segue senz'altro (§ 1) la sua verità anche per ogni altro insieme collo stesso numero cardinale $\nu+1$. Sia E' una parte qualunque di E_ν; noi distinguiamo i seguenti casi:

1) E' non contiene e_ν come elemento; allora E' è o $E_{\nu-1}$ o una parte di $E_{\nu-1}$, e perciò ha per numero cardinale o ν o uno dei numeri $1, 2, 3, \dots \nu-1$, perché noi supponiamo già vero il nostro teorema per l'insieme $E_{\nu-1}$ col numero cardinale ν.

2) E' consta dell'unico elemento e_ν; allora è $\overline{\overline{E'}}=1$.

3) E' consta di e_ν e di un insieme E'', cioè $E'=(E'', e_\nu)$; E'' è una parte di $E_{\nu-1}$ e quindi per quanto si è supposto ha per numero cardinale uno dei numeri $1, 2, 3, \dots \nu-1$; ma si ha $\overline{\overline{E'}}=\overline{\overline{E''}}+1$, dunque E' ha per numero cardinale uno dei numeri $2, 3, \dots \nu$.

Dimostrazione di A.–Ognuno degli insiemi da noi denotati con E_ν ha la proprietà di non essere equivalente ad alcuno dei suoi insiemi parziali. Perchè se si suppone che ciò sia vero per un certo ν, segue dal teorema D che lo stesso vale per il successivo $\nu+1$. Ora per $\nu=1$ si riconosce immediatamente che l'insieme $E_1=(e_0, e_1)$ non è equivalente ad alcuno dei suoi insiemi parziali che in questo caso sono (e_0) ed (e_1).

Consideriamo ora due numeri qualunque μ e ν della serie 1, 2, 3, ... e sia μ il precedente e ν il seguente; sarà

$E_{\mu-1}$ una parte di $E_{\nu-1}$; perciò $E_{\mu-1}$ e $E_{\nu-1}$ non sono equivalenti; quindi non sono uguali i corrispondenti numeri cardinali $\mu=\overline{\overline{E}}_{\mu-1}$ e $\nu=\overline{\overline{E}}_{\nu-1}$.

DIMOSTRAZIONE DI B.–Se dei due numeri cardinali finiti μ e ν è μ il precedente e ν il seguente, si ha $\mu < \nu$. Infatti consideriamo i due insiemi $M=E_{\mu-1}$ e $N=E_{\nu-1}$, per essi sono soddisfatte entrambe le condizioni indicate al § 2 per essere $\overline{\overline{M}}<\overline{\overline{N}}$. La condizione 1) è soddisfatta, perché per il teorema E un insieme parziale di $M=E_{\mu-1}$ può avere soltanto uno dei numeri cardinali $1,2,3,\dots\mu-1$, e quindi per il teorema A non può essere equivalente all'insieme $N=E_{\nu-1}$. La condizione 2) è soddisfatta, perché qui *M* stesso è una parte di *N*.

DIMOSTRAZIONE DI C.–Sia *a* un numero cardinale minore di $\nu+1$. Per la condizione 2) del § 2 esiste un insieme parziale di E_ν col numero cardinale *a*. Per il teorema E un insieme parziale di E_ν può avere soltanto uno dei numeri cardinali $1,2,3,\dots\nu$. Quindi *a* è uguale ad uno dei numeri $1,2,3,\dots\nu$. Per il teorema B nessuno di questi è maggiore di ν. Per conseguenza non vi è alcun numero cardinale *a* che sia minore di $\nu+1$ e maggiore di ν.

Per il seguito ha importanza il seguente teorema:

F. *«Sia K un insieme qualunque costituito di numeri cardinali finiti e diversi; tra questi ve ne è uno* x_1, *che è minore degli altri, e perciò è il minore di tutti».*

DIMOSTRAZIONE.–L'insieme *K* o contiene il numero 1, e allora questo è il minimo, $x_1=1$; ovvero non lo contiene. In questo secondo caso sia *J* l'insieme di *tutti* quei numeri cardinali della nostra serie 1, 2, 3, ... che sono minori di quelli che si trovano in *K*. Se un numero *v* appartiene a *J*, vi appartengono anche tutti i numeri $<v$. Ma *J* deve avere un elemento v_1 tale che v_1+1 e quindi anche tutti i numeri maggiori(17*) non appartengono a *J*, perché altrimenti *J* abbraccerebbe la totalità dei numeri cardinali finiti, ciò che non è perché in *J* non sono contenuti i numeri appartenenti a *K*. Dunque *J* è niente altro che $1, 2, 3, \ldots \nu_1$. Il numero $\nu_1+1=x_1$ è necessariamente un elemento di *K* e minore degli altri.

Al teorema F si connette il seguente:

G. «*Ogni insieme* $K\{x\}$ *costituito di numeri cardinali finiti e diversi, si può mettere sotto la forma di serie*

$$K=(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

essendo

$$x_1< x_2< x_3 \ldots » .$$

§ 6. Il più piccolo numero cardinale transfinito alef-zero.

Gli insiemi con numero cardinale finito diconsi *«insiemi finiti»*; tutti gli altri li vogliamo chiamare *«insiemi transfiniti»* ed i numeri cardinali che ad essi corrispondono *«numeri cardinali transfiniti»*.

La *totalità dei numeri cardinali finiti v* ci offre un primo esempio d'un insieme transfinito; chiameremo *alef-zero,* in segni $\aleph_0$, il numero cardinale che gli corrisponde

(§ 1); definiamo dunque

(1) $$\aleph_0 = \overline{\overline{\{\nu\}}}.$$

Che $\aleph_0$ sia un *numero transfinito,* cioè che *non sia uguale ad alcun numero finito μ,* segue dal semplice fatto, che, se all'insieme $\{\nu\}$ si aggiunge un nuovo elemento e_0, l'insieme somma $(\{\nu\}, e_0)$ è equivalente al primitivo $\{\nu\}$. Infatti tra i due si può stabilire una relazione reciprocamente univoca,(18*) per la quale all'elemento e_0 si fa corrispondere l'elemento 1 del secondo, e all'elemento ν del primo l'elemento $\nu+1$ del secondo. Perciò abbiamo per il § 3:

(2) $$\aleph_0 + 1 = \aleph_0.$$

Ma nel § 5 si è mostrato che $\mu+1$ è sempre diverso da μ, quindi $\aleph_0$ non è uguale ad alcun numero finito μ.

Il numero $\aleph_0$ è maggiore di qualunque numero finito μ:

(3) $$\aleph_0 > \mu.$$

Ciò segue, in virtù di quanto fu stabilito al § 3, da ciò che $\mu = \overline{\overline{(1, 2, 3, \dots \mu)}}$, niuna parte dell'insieme (1, 2, 3,...μ) è equivalente all'insieme $\{\nu\}$, e (1, 2, 3,...μ) è esso stesso una parte di $\{\nu\}$.

Inoltre *$\aleph_0$ è il più piccolo numero cardinale transfinito.* Se a è un numero cardinale transfinito qualunque diverso da $\aleph_0$, si ha

(4) $$\aleph_0 < a.$$

Ciò è basato sui seguenti teoremi:

A. *«Ogni insieme transfinito T ha insiemi parziali il cui numero cardinale è $\aleph_0$».*

DIMOSTRAZIONE.– Se con una legge qualunque si sopprime da *T(19*)* un numero finito di elementi $t_1, t_2, \ldots t_{\nu-1}$, vi è sempre la possibilità di levare da esso un altro elemento t_ν. L'insieme $\{t_\nu\}$, dove ν denota un numero cardinale finito qualunque è un insieme parziale di *T* il cui numero cardinale è $\aleph_0$, perché $\{t_\nu\} \sim \{\nu\}$ (§ 1).

B. *«Se S è un insieme transfinito col numero cardinale $\aleph_0$ e S_1 un qualunque insieme transfinito parte di S, sarà anche $\overline{\overline{S_1}} = \aleph_0$».*

DIMOSTRAZIONE.– Si suppone che sia $S \sim \{\nu\}$; stabilita una legge di corrispondenza tra questi due insiemi, sia s_ν quell'elemento di *S* che corrisponde all'elemento ν di $\{\nu\}$, si ha

$$S = \{s_\nu\}.$$

L'insieme S_1 parte di *S* consta di certi elementi s_χ di *S*, e la totalità dei numeri χ forma un insieme transfinito *K* parte di $\{\nu\}$.

Per il teorema G del § 5, l'insieme *K* si può mettere sotto forma di serie

$$K = \{\chi_\nu\},$$

dove

$$\chi_\nu < \chi_{\nu+1},$$

quindi è anche

$$S_1 = \{s_{\chi_\nu}\}.$$

Di qui segue che $S_1 \sim S$, e per conseguenza $\overline{\overline{S_1}} = \aleph_0$.

Da A e B, in virtù del § 2, si deduce la formola (4).

Dalla (2), aggiungendo 1 ad ambi i membri, si ha:

$$\aleph_0 + 2 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0,$$

e ripetendo la stessa osservazione:

$$\aleph_0 + \nu = \aleph_0. \tag{5}$$

Ma noi abbiamo ancora

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0. \tag{6}$$

Infatti, per la (1) del § 3, $\aleph_0 + \aleph_0$ è il numero cardinale $\overline{\overline{(\{a_\nu\}, \{b_\nu\})}}$, essendo

$$\overline{\overline{\{a_\nu\}}} = \overline{\overline{\{b_\nu\}}} = \aleph_0.$$

Ora si ha evidentemente(20*)

$$\{\nu\} = (\{2\nu - 1\}, \{2\nu\}),$$

$$(\{2\nu - 1\}, \{2\nu\}) \sim (\{a_\nu\}, \{b_\nu\}),$$

dunque

$$\overline{\overline{(\{a_\nu\}, \{b_\nu\})}} = \overline{\overline{\{\nu\}}} = \aleph_0.$$

L'equazione (6) può anche scriversi:(21*)

$$\aleph_0 \cdot 2 = \aleph_0,$$

ed, aggiungendo ad ambi i membri ripetutamente $\aleph_0$, si deduce

$$\aleph_0 \cdot \nu = \nu \cdot \aleph_0 = \aleph_0. \tag{7}$$

Ora noi abbiamo ancora

(8) $$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

DIMOSTRAZIONE.− Per la (6) del § 3, $\aleph_0 \cdot \aleph_0$ è il numero cardinale che spetta all'insieme prodotto

$$\{(\mu,\nu)\},$$

dove μ e ν sono due qualunque, fra loro indipendenti, numeri cardinali finiti. Ora, se anche λ rappresenta un qualunque numero cardinale finito (per guisa che $\{\lambda\}$, $\{\mu\}$ e $\{\nu\}$ sono tre notazioni diverse per lo stesso insieme dei numeri cardinali finiti), noi dobbiamo dimostrare che

$$\{(\mu,\nu)\} \sim \{\lambda\}.$$

Denotiamo $\mu+\nu$ con ρ; ρ prende tutti i valori numerici 2, 3, 4,... ed in tutto vi sono ρ-1 elementi (μ,ν), per cui $\mu+\nu=\rho$,*(22*)* che sono

$$(1,\rho-1),(2,\rho-2),\ldots(\rho-1,1).$$

In questa successione si ponga anzitutto ρ=2 e si scriva l'unico elemento (1, 1); indi si ponga ρ=3 e si scrivano i due elementi (1, 2), (2, 1); poi si scrivano i tre elementi per cui ρ=4, ecc.; si otterranno così tutti gli elementi (μ,ν) disposti in una semplice successione:

(1, 1); (1, 2), (2, 1); (1, 3), (2, 2), (3, 1); (1, 4), (2, 3), ...,

e precisamente avviene (come facilmente si vede) che l'elemento (μ,ν) si trova scritto al λ^{esimo} posto, essendo

(9) $$\lambda=\mu+\frac{(\mu+\nu-1)(\mu+\nu-2)}{2}.(23*)$$

Ora λ assume ciascun valore 1, 2, 3, ... una volta sola; quindi per mezzo della (9) si ha una relazione reciprocamente univoca tra i due insiemi $\{\lambda\}$ e $\{(\mu, \nu)\}$.

Moltiplicando i due membri dell'equazione (8) per $\aleph_0$ si ottiene $\aleph_0^3 = \aleph_0^2 = \aleph_0$, e dopo una ripetuta moltiplicazione per $\aleph_0$ si ha per ogni numero cardinale finito ν l'equazione

$$\aleph_0^\nu = \aleph_0. \tag{10}$$

I teoremi E ed A del § 5 conducono al seguente teorema sugli insiemi finiti:

C. *«Ogni insieme finito E è cosifatto che esso non è equivalente ad alcuno dei suoi insiemi parziali».*

A questo teorema fa riscontro il seguente per gli insiemi transfiniti:

D. *«Ogni insieme transfinito T è cosifatto, che esso ha degli insiemi parziali T_1, che gli sono equivalenti».*

Dimostrazione.− Per il teorema A di questo paragrafo vi è un insieme parziale $S=\{t_\nu\}$ di T che ha il numero cardinale $\aleph_0$. Sia $T=(S, U)$, di guisa che U è composto di quelli elementi di T, che son diversi dagli elementi t_ν. Poniamo $S_1=\{t_{\nu+1}\}$, $T_1 = (S_1, U)$, sarà T_1 un insieme parziale di T, e precisamente quello che si ottiene da T sopprimendo il solo elemento t_1. Siccome è $S \sim S_1$ (teorema B di questo paragrafo), ed $U \sim U$, così è eziandio (§ 1) $T \sim T_1$.

Questi teoremi C e D mettono nella maniera più evidente in luce la differenza essenziale tra gli insiemi finiti e gli infiniti, siccome fin dal 1877 ho indicato nel t. 84

del *Crelle's Journal,* pag. 242.

Dopo di aver introdotto il più piccolo numero cardinale transfinito $\aleph_0$ e di averne stabilite le più immediate proprietà, si presenta la questione dei numeri cardinali più elevati e della loro deduzione da $\aleph_0$.

Mostreremo che i numeri cardinali transfiniti si possono ordinare rispetto alla loro grandezza, ed in quest'ordine formano, come i numeri cardinali finiti, ma in un senso più esteso, un *insieme ben ordinato.*

Da $\aleph_0$ si deduce con una determinata legge il numero cardinale immediatamente maggiore $\aleph_1$, da questo colla stessa legge l'immediatamente maggiore $\aleph_2$, e così di seguito.

Ma anche la serie illimitata dei numeri cardinali

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots \aleph_\nu, \ldots$$

non esaurisce l'idea dei numeri cardinali transfiniti. Si dimostrerà l'esistenza d'un numero cardinale, che denoteremo con $\aleph_\omega$ e che si presenta come l'immediatamente maggiore di tutti gli $\aleph_\nu$; da esso, e nella stessa maniera come $\aleph_1$ da $\aleph_0$, se ne deduce uno immediatamente maggiore $\aleph_{\omega+1}$, e così si seguita senza fine.

Per ogni numero cardinale transfinito *a* ve ne è uno immediatamente maggiore che si deduce da esso secondo un'unica legge; ed anche per ogni insieme $\{\boldsymbol{a}\}$ illimitatamente crescente e ben ordinato di numeri cardinali transfiniti ve ne è uno immediatamente maggiore, che se ne deduce con unica legge.

A stabilire rigorosamente questi risultati da noi trovati nel 1882 ed esposti sia in un opuscolo «Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883», sia nel Vol. XXI dei «Mathematische Annalen» noi ci serviamo dei così detti «*tipi d'ordine*» (Ordnungstypen), di cui dobbiamo anzitutto esporre le teorie nei paragrafi seguenti.

§ 7. I tipi d'ordine di insiemi semplicemente ordinati.

Chiamiamo *semplicemente ordinato* un insieme M quando tra i suoi elementi m sussiste un determinato ordine di posto (Rangordnung), per cui considerando due elementi qualunque m_1 ed m_2 l'uno prende il posto *inferiore* e l'altro il posto *superiore*, e ciò in guisa tale che, se di tre elementi m_1, m_2, ed m_3 è per il posto m_1 inferiore a m_2 ed m_2 inferiore ad m_3, anche m_1 è per il posto inferiore ad m_3.

La relazione tra due elementi m_1 e m_2, per cui m_1 occupa il posto inferiore, ed m_2 il posto superiore, nell'assegnato ordine, sarà designata colle formole

(1) $$m_1 \prec m_2, \quad m_2 \succ m_1.(24^*)$$

Così ad esempio ogni punteggiata P assegnata su una retta infinita è un insieme semplicemente ordinato, se considerando due punti qualunque p_1 e p_2 di essa si attribuisce il posto inferiore a quello, la cui coordinata (dopo di avere fissata l'origine e la direzione positiva) è minore.

È chiaro che uno stesso insieme può essere «ordinato semplicemente» secondo le più svariate leggi. Prendiamo ad esempio l'insieme R di tutti i numeri razionali positivi $\frac{p}{q}$ (dove p e q sono interi primi fra loro), che sono maggiori di 0 e minori di 1; si ha anzitutto il suo ordine «naturale» che è quello rispetto alla grandezza. Essi si possono però ancora ordinare (ed in questo nuovo ordine denoteremo l'insieme con R_0) in guisa che di due numeri $\frac{p_1}{q_1}$ e $\frac{p_2}{q_2}$, per cui le somme p_1+q_1 e p_2+q_2 hanno valori diversi, abbia posto inferiore quello per cui la corrispondente somma è minore, ed in guisa che il più piccolo dei due numeri razionali sia quello di posto inferiore nel caso in cui $p_1+q_1=p_2+q_2$. In questo ordine, corrispondendo ad uno stesso valore di $p + q$ un numero finito di numeri razionali diversi $\frac{p}{q}$, il nostro insieme ha evidentemente la forma:

$$R_0=(r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots)=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \ldots\right),$$

dove

$$r_\nu \prec r_{\nu+1}\ .$$

Dunque, ogniqualvolta parliamo di un insieme M *semplicemente ordinato* noi imaginiamo stabilito un determinato ordine di posto per i suoi elementi nel senso sopra dichiarato.

Esistono insiemi doppiamente, triplamente, v volte, a volte ordinati, ma da questi per ora nel nostro studio facciamo astrazione. Perciò ci permettiamo in quel che segue di adoperare l'espressione più breve «insieme ordinato» nel senso di «insieme semplicemente ordinato».

Per ogni insieme ordinato M si ha un determinato «tipo ordinatore» o più brevemente un determinato «tipo», che noi denotiamo con

(2) $$\overline{M};$$

con ciò intendiamo *l'idea generale che si ricava da M, quando si fa astrazione soltanto dalla natura degli elementi m, ma si conserva per essi l'ordine di posto.*

Perciò il tipo d'ordine $\overline{M}$ è *esso stesso un insieme ordinato,* i cui elementi sono *unità pure,* le quali hanno fra loro lo stesso ordine di posto che hanno gli elementi corrispondenti di M, da cui quelle si dedussero coll'astrazione.

Chiamiamo «simili» (ähnlich) due insiemi M ed N se essi si possono riferire tra loro in modo reciprocamente univoco, in guisa che se m_1 ed m_2 sono due elementi qualunque di M, n_1 ed n_2 i corrispondenti elementi di N, la relazione di posto tra m_1 ed m_2 dentro M sia sempre la stessa che quella tra n_1 ed n_2 dentro N. Una siffatta corrispondenza di insiemi simili viene da noi chiamata una *rappresentazione* (Abbildung) di uno sull'altro. In essa ad un insieme parziale M_1 di M (che evidentemente viene ad essere anche un insieme ordinato) corrisponde un insieme parziale simile N_1 di N. La similitudine di due insiemi ordinati M e N viene espressa in formole con

(3) $$M \simeq N.$$

Ogni insieme ordinato è simile a sè stesso.

Se due insiemi ordinati sono simili ad un terzo, essi sono anche simili tra loro.

È facile dimostrare che *due insiemi ordinati hanno lo stesso tipo d'ordine allora e solo allora quando essi sono simili; di maniera che delle due formole*

(4) $$\overline{M} = \overline{N}, \quad M \simeq N$$

una è sempre conseguenza dell'altra.

Se in un tipo d'ordine $\overline{M}$ si fa ancora astrazione dall'ordine degli elementi, si ottiene (§ 1) il numero cardinale $\overline{\overline{M}}$ dell'insieme ordinato M, che è ad un tempo il numero cardinale del tipo d'ordine $\overline{M}$.

Da $\overline{M} = \overline{N}$ segue sempre $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, cioè insiemi ordinati dello stesso tipo hanno sempre la stessa potenza o numero cardinale; la similitudine di insiemi ordinati ne porta sempre la equivalenza. Per lo contrario due insiemi ordinati possono essere equivalenti, senza essere simili.

Per rappresentare i tipi d'ordine, faremo uso delle lettere minuscole dell'alfabeto greco. Se α è un tipo ordinatore, con

(5) $$\overline{\alpha}$$

intendiamo il corrispondente numero cardinale.

I tipi ordinatori di insiemi finiti semplicemente ordinati non offrono alcun particolare interesse. Perchè facilmente si dimostra, che per uno stesso numero cardinale finito *v* tutti gli insiemi semplicemente ordinati sono simili tra loro, e però hanno uno stesso tipo. I tipi ordinatori finiti sono perciò soggetti alle stesse leggi dei numeri cardinali finiti, e per rappresentare gli elementi è lecito far uso degli stessi segni 1, 2, 3, …, ν,... sebbene questi siano da ritenersi diversi dai numeri cardinali.

Ben diverse sono le cose per i *tipi ordinatori transfiniti;* perchè per uno stesso numero cardinale transfinito vi sono innumerevoli tipi diversi di insiemi semplicemente ordinati, i quali nella loro totalità costituiscono una particolare *«classe di tipi»*.

Ognuna di queste classi di tipi è quindi determinata da un numero cardinale transfinito *a*, che è comune a tutti i tipi appartenenti alla classe; perciò noi la chiamiamo brevemente classe tipica [*a*].(25*)

La classe che naturalmente ci si presenta la prima, di cui la trattazione completa deve essere l'immediato scopo della teoria degli insiemi transfiniti, è la classe tipica [$\aleph_0$], la quale abbraccia tutti i tipi col numero cardinale transfinito minimo $\aleph_0$.

Dobbiamo ben distinguere dal numero cardinale *a*, che *determina* la classe tipica [*a*], quel numero cardinale *a'*, che *alla sua volta è determinato* dalla classe tipica [*a*]; questo è il numero cardinale, che spetta (§ 1) alla classe tipica [*a*] in quanto questa rappresenta *un ben definito insieme, i cui elementi sono tutti i tipi α col numero cardinale a.* Vedremo che *a'* è diverso da *a* e precisamente è sempre maggiore di *a*.

Se in un insieme ordinato M si invertono tutte le relazioni di posto dei suoi elementi, in guisa che dappertutto un elemento superiore diventa inferiore, ed uno inferiore diventa superiore, si ottiene nuovamente un insieme ordinato, che denotiamo con

$$(6) \qquad {}^{*}M$$

e chiamiamo l'«*inverso*» di M.

Se $\alpha = \overline{M}$, denotiamo il tipo ordinatore di $^{*}M$ con

$$(7) \qquad {}^{*}\alpha\,.$$

Può avvenire che sia $^{*}\alpha = \alpha$, come p. es. nei tipi finiti, o nel tipo dell'insieme R di tutti i numeri razionali maggiori di 0 e minori di 1 nel loro ordine naturale, che noi studieremo denotandolo con η.

Osserviamo inoltre, che due insiemi ordinati simili possono essere rappresentati l'uno sull'altro o in una sola maniera o in più maniere; nel primo caso il corrispondente tipo è simile a sè stesso solo in una maniera, nel secondo in più maniere.

Così non solo tutti i tipi finiti, ma anche i tipi degli insiemi transfiniti «ben ordinati», dei quali più tardi ci occuperemo e che noi chiamiamo numeri ordinali transfiniti, sono di tal sorta da ammettere una sola rappresentazione in sè stessi. All'opposto il tipo η è simile a sè stesso in innumerevoli maniere.

Vogliamo chiarire questa differenza con due semplici esempi.

Con ω intendiamo il tipo d'un insieme ben ordinato

$$(e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots)$$

in cui

$$e_\nu \prec e_{\nu+1}$$

e dove ν è rappresentante di tutti i numeri cardinali finiti.

Un altro insieme ben ordinato

$$(f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots)$$

colla condizione

$$f_\nu \prec f_{\nu+1} \,,$$

dello stesso tipo ω, può evidentemente essere «rappresentato» sul precedente soltanto coll'assumere e_ν ed f_ν come elementi corrispondenti. Perché l'elemento e_1 del primo di posto infimo deve nella rappresentazione essere coordinato all'elemento infimo f_1 del secondo, e così l'elemento e_2 di posto successivo ad e_1 deve essere coordinato all'elemento f_2 di posto successivo ad f_1, ecc.

Ogni altra relazione reciprocamente univoca dei due insiemi equivalenti $\{e_\nu\}$ e $\{f_\nu\}$ non è una «rappresentazione» nel senso che abbiamo sopra stabilito per la teoria dei tipi.

Prendiamo ora un insieme ordinato della forma

$$\{e_{\nu'}\} \quad ,$$

dove ν' è rappresentante di tutti i numeri interi finiti positivi e negativi, incluso lo 0, e dove si ha parimenti

$$e_{\nu'} \prec e_{\nu'+1} \,.$$

Questo insieme non ha alcun elemento di posto infimo, nè alcuno di posto supremo. Il suo tipo, secondo la definizione di somma che sarà data al § 8, è

$$*\omega+\omega \ .$$

Esso è simile a sè stesso in innumerevoli maniere. Infatti consideriamo un insieme dello stesso tipo

$$\{f_{\nu'}\} \ ,$$

dove

$$f_{\nu'} \prec f_{\nu'+1} \ ;$$

i due insiemi ordinati possono essere rappresentati l'uno sull'altro, in guisa che all'elemento $e_{\nu'}$ del primo corrisponda l'elemento $f_{\nu'_0+\nu'}$ del secondo, essendo ν'_0 un determinato fra i numeri ν'. Per l'arbitrarietà di ν'_0 abbiamo dunque qui infinite rappresentazioni.

L'idea qui sviluppata di «tipo ordinatore» quando in ugual maniera sia trasportata agli «insiemi più volte ordinati», accanto all'idea di «numero cardinale o potenza» introdotta nel § 1, abbraccia tutto il «numerabile» che mai si possa pensare, e non ammette in questo senso alcuna ulteriore generalizzazione. Essa non contiene nulla di arbitrario, ma è la naturale estensione dell'idea di numero. *Merita qui di essere particolarmente rilevato, che il criterio di eguaglianza* (4) *segue con assoluta necessità dall'idea di tipo ordinatore e però non ammette cambiamento di sorta*. Nell'avere mal compreso questa circostanza è da ricercarsi la causa fondamentale dei gravi errori, che si trovano nell'opera del sig. G. VERONESE: «Grundzüge der Geometrie, Deutsch von A. Schepp, Leipzig 1894».(26*)

Là è spiegato a pag. 30 il «numero di un gruppo ordinato», che coincide del tutto con ciò che noi abbiamo chiamato «tipo d'ordine di un insieme semplicemente ordinato» (Zur Lehre von Transfiniten, Halle 1890, pag. 68-75, estratto dal Ztschr. f. Philos. u. philos. Kritik(27*) dell'anno 1887).

Ma il sig. V. crede di dover fare un'aggiunta al criterio dell'uguaglianza. Egli dice a pag. 27 dell'edizione originale italiana: «Numeri le unità dei quali si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine e di cui l'uno non è parte o uguale ad una parte dell'altro, sono uguali».

Questa definizione dell'uguaglianza contiene un *circolo* e perciò diventa un *non senso*.

Che intende egli mai colla sua aggiunta *non uguale ad una parte dell'altro?(28*)* Per rispondere a questa domanda, bisogna anzitutto sapere quando due numeri sono uguali o non uguali. Quindi l*a sua definizione dell'uguaglianza* (fatta astrazione dalla sua arbitrarietà) *presuppone una definizione dell'uguaglianza, che nuovamente presuppone una definizione dell'uguaglianza, per cui occorre di nuovo sapere che cosa è uguale e che cosa disuguale, ecc. ecc. all'infinito.*

Dopo che il sig. V. in tal maniera ha, per così dire, volontariamente abbandonato il fondamento indispensabile per confrontare i numeri, non fa meraviglia la sregolatezza colla quale egli ulteriormente opera coi suoi numeri pseudotransfiniti, ed ascrive a questi proprietà, che non possono possedere per la semplice ragione che essi, nella forma da lui imaginata, non hanno esistenza di sorta a meno di quella che hanno sulla carta, ove sono scritti. Quindi si capisce anche la sorprendente rassomiglianza che riattacca le sue imagini di numeri ai «numeri infiniti» eminentemente assurdi di FONTENELLE nella sua «Géométrie de l'infini, Paris 1727».(29*)

Da poco tempo anche il sig. W. KILLING,(30*) nel suo «Index Lectionum» dell'Accademia di Münster (per il 1895-96), ha espresso le sue obbiezioni contro la base del libro del sig. VERONESE.

§ 8. Addizione e moltiplicazione dei tipi d'ordine.

L'insieme (*M, N*) somma di due insiemi *M* ed *N*, quando questi sono ordinati, si può pure riguardare come un insieme ordinato, nel quale le relazioni di posto degli elementi di *M* fra loro, e così pure le relazioni di posto degli elementi di *N* fra loro, son rimaste le stesse rispettivamente come in *M* ed in *N*, inoltre tutti gli elementi di *M* hanno posto più basso di tutti gli elementi di *N*. Se *M'* ed *N'* sono altri due insiemi ordinati, $M \simeq M'$, $N \simeq N'$, è eziandio $(M, N) \simeq (M', N')$; il tipo ordinatore di *(M, N)* dipende dunque soltanto dai tipi ordinatori $\overline{M} = \alpha$, $\overline{N} = \beta$; quindi noi definiamo:

(1) $$\alpha + \beta = \overline{(M, N)}.$$

Nella somma $\alpha+\beta$, α si dice l'«*augendus*» e β l'«*addendus*».

Per tre tipi qualunque vige la legge associativa, facile a dimostrarsi,

(2) $$\alpha+(\beta+\gamma)= (\alpha+\beta)+\gamma.$$

Per lo contrario, la legge commutativa non è valida in generale per l'addizione di tipi. Ciò si vede già nel seguente semplice esempio.

Se ω è il tipo menzionato al § 7 dell'insieme ben ordinato

$$E=(e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots), \quad e_\nu \prec e_{\nu+1},$$

$1+\omega$ non è uguale a $\omega+1$.

Perchè, se f è un nuovo elemento, si ha per la (1)

$$1+\omega=\overline{(f,E)},$$
$$\omega+1=\overline{(E,f)}.$$

Ma l'insieme

$$(f,E)=(f,e_1,e_2,\ldots,e_\nu,\ldots)$$

è simile all'insieme E; dunque

$$1+\omega=\omega.$$

Invece gli insiemi E e (E, f) non sono simili, poichè il primo non ha alcun termine di posto supremo, e il secondo ha il termine di posto supremo f. Quindi $\omega+1$ è diverso da $\omega=1+\omega$.

Da due insiemi ordinati M ed N coi tipi α e β si può ricavare un insieme ordinato S nella maniera seguente: in N al posto d'ogni elemento n si sostituisce un insieme ordinato M_n, che ha lo stesso tipo α di M, cioè

(3) $$\overline{M_n}=\alpha,$$

indi per ciò che riguarda l'ordine di

(4) $$S=\{M_n\}$$

si fanno le convenzioni seguenti:

1) due elementi qualunque di S che appartengono ad uno stesso insieme M_n, conservano in S la stessa relazione di posto che in M_n,

2) due elementi qualunque di S, che appartengono a due insiemi diversi M_{n_1} e M_{n_2}, prendono in S la relazione

di posto, che n_1 ed n_2 hanno in N.

Il tipo ordinatore di S dipende, come è facile a vedersi, dai tipi α e β; noi definiamo:

(5) $$\alpha \cdot \beta = \overline{S} \ .$$

In questo prodotto α si dice il «*multiplicandus*» e β il «*multiplicator*».

Stabilita una rappresentazione qualunque di M su M_n, sia m_n l'elemento di M_n corrispondente all'elemento m di M. Allora noi possiamo anche scrivere

(6) $$S = \{m_n\} \ .$$

Assumiamo ora un terzo insieme ordinato $P = \{p\}$ col tipo ordinatore $\overline{P} = \gamma$; si ha per la (5)

$$\alpha \cdot \beta = \overline{\{m_n\}}, \qquad \beta \cdot \gamma = \overline{\{n_p\}} \ ,$$
$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \overline{\{(m_n)_p\}}, \qquad \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = \overline{\{m_{(n_p)}\}} \ .$$

Ma i due insiemi ordinati $\{(m_n)_p\}$ e $\{m_{(n_p)}\}$ sono simili e vengono l'uno sull'altro rappresentati quando si riguardino come corrispondenti gli elementi $(m_n)_p$ e $m_{(n_p)}$.

Quindi per tre tipi α, β, γ sussiste la *legge associativa*

(7) $$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \ .$$

Dalle (1) e (5) segue anche facilmente la *legge distributiva*

(8) $$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \ ,$$

però soltanto nella forma qui scritta, ove *il fattore binomio fa da moltiplicatore*.

Per lo contrario la *legge commutativa* nella moltiplicazione dei tipi, come nell'addizione, non vale in generale. Ad esempio $2\cdot\omega$ e $\omega\cdot 2$ sono tipi diversi; infatti si ha per la (5)

$$2\cdot\omega=\overline{(e_1, f_1;\ e_2, f_2; \ldots; e_\nu, f_\nu; \ldots)}=\omega\ ;$$

per lo contrario è

$$\omega\cdot 2=\overline{(e_1, e_2, \ldots, e_\nu \ldots;\ f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots)}$$

evidentemente diverso da ω.

Confrontando le definizioni date al § 3 delle operazioni fondamentali per i numeri cardinali con quelle qui stabilite per i tipi ordinatori, si riconosce facilmente, che il numero cardinale della somma di due tipi è uguale alla somma dei numeri cardinali di ciascun tipo, e che il numero cardinale del prodotto di due tipi è uguale al prodotto dei numeri cardinali di ciascun tipo. Ogni equazione adunque fra tipi d'ordine formata colle due operazioni fondamentali sussiste ancora quando in essa al posto di tutti i tipi si sostituiscono i loro numeri cardinali.

§ 9. Il tipo d'ordine *η* dell'insieme *R* di tutti i numeri razionali, maggiori di 0 e minori di 1, nel loro ordine naturale.

Per *R* intendiamo, come al § 7, il sistema di tutti i numeri razionali $\frac{p}{q}$ (p e q interi primi tra loro), che sono >0 e <1, *nel loro ordine naturale*, cioè quello in cui il posto è determinato dalla grandezza del numero. Denotiamo poi con η il tipo ordinatore di R:

$$(1) \qquad \eta = \overline{R} \; .$$

Ma noi, al § 7, abbiamo anche indicato per lo stesso insieme un altro ordine, nel quale lo chiamiamo R_0, dove il posto è determinato in prima linea dalla grandezza di $p+q$, ed in seconda linea, e precisamente per quei numeri razionali per cui $p+q$ ha uno stesso valore, dalla grandezza di $\frac{p}{q}$. R_0 ha la forma di un insieme ben ordinato del tipo ω:

$$(2) \qquad R_0=(r_1, r_2,..., r_\nu,...) \text{ dove } r_\nu \prec r_{\nu+1} \, ,$$

$$(3) \qquad \overline{R_0} = \omega .$$

Siccome R ed R_0 differiscono soltanto per l'ordine degli elementi, così essi hanno lo stesso numero cardinale, e siccome evidentemente $\overline{\overline{R_0}} = \aleph_0$, così anche

$$(4) \qquad \overline{\overline{R}} = \overline{\eta} = \aleph_0 \, .$$

Il tipo η appartiene dunque alla classe tipica $[\aleph_0]$.

Osserviamo in secondo luogo, che in R non si trova nè un elemento di posto infimo, nè un elemento di posto supremo.

In terzo luogo R ha la proprietà che tra due suoi elementi qualunque cadono altri elementi; questa proprietà viene da noi espressa colle parole: *R è dappertutto den-*

so.

Vogliamo ora dimostrare che queste tre proprietà caratterizzano il tipo η di R, in guisa che sussiste il seguente teorema:(31*)

«Se un insieme semplicemente ordinato M soddisfa alle tre condizioni:

1) $\overline{\overline{M}} = \aleph_0$,

2) M non ha elementi nè di posto infimo nè di posto supremo,

3) M è dappertutto denso;

il tipo ordinatore di M è uguale a η:

$$\overline{M} = \eta».$$

DIMOSTRAZIONE.− Per la condizione 1) M si può mettere sotto la forma di un insieme ben ordinato del tipo ω; presa come base una tale forma, denotiamo M con M_0, e poniamo

(5) $$M_0 = \left(m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots\right).$$

Ora noi dobbiamo dimostrare che

(6) $$M \simeq R ,$$

cioè dobbiamo dimostrare che M si può *rappresentare* su R in guisa che la relazione di posto tra due elementi qualunque in M è la stessa che la relazione di posto tra i due elementi corrispondenti in R.

All'elemento r_1 in R sia fatto corrispondere l'elemento m_1 in M.

r_2 ha una determinata relazione di posto rispetto a r_1; per la condizione 2) vi sono infiniti elementi m_ν di M, che hanno rispetto a m_1 le stesse relazioni di posto, che ha in R r_2 rispetto a r_1; *tra essi* scegliamo quello che ha in M_0 l'indice minimo, denotiamolo con m_{ι_2} e coordiniamolo a r_2.

r_3 ha determinate relazioni di posto rispetto ad r_1 e r_2; per le condizioni 2) e 3) vi sono infiniti elementi m_ν di *M*, che hanno in *M* le stesse relazioni di posto rispetto a m_1 e m_{ι_2}, che ha r_3 in *R* rispetto a r_1 e r_2; tra essi scegliamo quello, e sia m_{ι_3}, che ha in M_0 l'indice minimo, e coordiniamolo a r_3.

Secondo la stessa legge imaginiamo continuato il processo di coordinazione; dopo che ai *v* elementi

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_\nu$$

di *R* furono assegnati come imagini in *M* determinati elementi

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots m_{\iota_\nu}$$

i quali in *M* hanno fra loro le stesse relazioni di posto che i corrispondenti in *R*, si assegni come imagine dell'elemento $r_{\nu+1}$ di *R* l'elemento $M_{\iota_{\nu+1}}$ di *M*, che ha in M_0 l'indice minimo e che rispetto a

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\nu}$$

ha in *M* le stesse relazioni di posto, che ha $r_{\nu+1}$ in *R* rispetto a $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_\nu$.

In questa maniera noi abbiamo per tutti gli elementi r_ν di *R* assegnati come imagini determinati elementi m_{ι_ν}

di M e gli elementi m_{ι_ν} hanno in M lo stesso ordine che i corrispondenti elementi r_ν hanno in R.

Ma deve ancora essere dimostrato che gli elementi m_{ι_ν} comprendono tutti gli elementi m_ν di M, ovvero, ciò che è lo stesso, che la serie

$$1, \iota_2, \iota_3, \ldots, \iota_\nu, \ldots$$

è soltanto una permutazione della serie

$$1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$$

Noi dimostriamo ciò con una *induzione completa*, facendo vedere che se nella rappresentazione si impiegano gli elementi m_1, m_2, … , m_ν *lo stesso avviene anche per l'elemento seguente* $m_{\nu+1}$.

Sia λ così grande che tra gli elementi

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\lambda}$$

si trovino gli elementi

$$m_1, m_2, \ldots, m_\nu \quad ,$$

(i quali per ipotesi compariscono nella rappresentazione). Può avvenire che tra essi si trovi anche $m_{\nu+1}$, e allora $m_{\nu+1}$ viene impiegato nella rappresentazione.

Ma se $m_{\nu+1}$ *non si trova fra gli elementi*

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\lambda} \quad ,$$

$m_{\nu+1}$ ha rispetto a questi elementi dentro M una determinata relazione di posto; la stessa relazione di posto rispetto a r_1, r_2 ,…, r_λ hanno in R infiniti elementi di R, tra questi sia $r_{\lambda+\sigma}$ quello che in R_0 ha l'indice minimo.

Allora $m_{\nu+1}$, come è facile persuadersi, ha in M rispetto a

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_{\lambda+\sigma-1}}$$

la stessa relazione di posto, che ha $r_{\lambda+\sigma}$ in R rispetto a

$$r_1, r_2, \ldots, r_{\lambda+\sigma-1} \quad .$$

Siccome m_1, m_2, … , m_ν già sono comparsi nella rappresentazione, così è $m_{\nu+1}$ l'elemento dotato del minimo indice in M_0 che ha questa relazione di posto rispetto a

$$m_1, m_{\iota_2}, \ldots, m_{\iota_{\lambda+\sigma-1}} \quad .$$

Per conseguenza seguendo la nostra legge di corrispondenza si ha

$$m_{\iota_{\lambda+\sigma}} = m_{\nu+1} \; .$$

Dunque anche in questo caso l'elemento $m_{\nu+1}$ viene ad essere rappresentato, e precisamente è $r_{\lambda+\sigma}$ il suo corrispondente in R.

E così noi vediamo, che col nostro modo di corrispondenza *tutto l'insieme M* viene ad essere rappresentato su tutto l'insieme R; M ed R sono insiemi simili, c. v. d.

Dal teorema ora dimostrato si deducono a mo' d'esempio i seguenti:

«η è il tipo ordinatore dell'insieme di tutti i numeri razionali negativi e positivi, incluso lo zero, nel loro ordine naturale.»

«η è il tipo ordinatore dell'insieme di tutti i numeri razionali maggiori di a e minori di b, nel loro ordine naturale, dove a e b son due numeri reali qualunque, e $a<b$.»

«η è il tipo ordinatore dell'insieme di tutti i numeri reali algebrici nel loro ordine naturale.»

«η è il tipo ordinatore dell'insieme di tutti i numeri reali algebrici, maggiori di a e minori di b, nel loro ordine naturale, dove a e b sono due numeri reali qualunque, e $a<b$.»

Infatti tutti questi insiemi ordinati soddisfano alle tre condizioni richieste per M dal nostro teorema (*Crelle's Journal*, Bd. 77, pag. 258).

Consideriamo inoltre degli insiemi che, secondo le definizioni del § 8, hanno i tipi $\eta+\eta$, $\eta\eta$, $(1+\eta)\eta$, $(\eta+1)\eta$, $(1+\eta+1)\eta$, per essi sono ancora soddisfatte quelle tre condizioni. Quindi abbiamo i teoremi:

$$\eta+\eta=\eta, \tag{7}$$

$$\eta\eta=\eta, \tag{8}$$

$$(1+\eta)\eta=\eta, \tag{9}$$

$$(\eta+1)\eta=\eta, \tag{10}$$

$$(1+\eta+1)\eta=\eta. \tag{11}$$

Applicando più volte la (7) e la (8) si trova per ogni numero finito ν:

$$\eta \cdot \nu = \eta, \tag{12}$$

$$\eta^{\nu} = \eta. \tag{13}$$

Per lo contrario, per $\nu>1$, i tipi $1+\eta$, $\eta+1$, $\nu\cdot\eta$, $1+\eta+1$

sono, come si vede facilmente, diversi fra loro e ancora diversi da η. D'altra parte è

(14) $$\eta+1+\eta = \eta,$$

ma $\eta+\nu+\eta$ per $\nu>1$ è diverso da η.

Finalmente conviene ancora mettere in rilievo che

(15) $$^*\eta = \eta.$$

§ 10. Le serie fondamentali contenute in un insieme ordinato transfinito.

Prendiamo a considerare un insieme M transfinito, semplicemente ordinato, qualunque. Ogni insieme parziale di M è esso pure un insieme ordinato. Per lo studio del tipo $\overline{M}$ si manifestano particolarmente utili quegli insiemi parziali di M, che appartengono ai tipi ω ed $^*\omega$; noi li chiameremo «*serie fondamentali di primo ordine contenute in M*» e precisamente i primi (quelli del tipo ω) *«ascendenti»*, gli altri (del tipo $^*\omega$) *«discendenti»*.

Siccome noi qui ci limitiamo alla considerazione delle serie fondamentali *del primo ordine* (in studii successivi ne verranno in campo anche altre d'ordine superiore), così noi le chiameremo qui semplicemente *«serie fondamentali»*.

Una «serie fondamentale» ascendente ha dunque la forma

(1) $$\{a_\nu\}, \quad \text{ove } a_\nu \prec a_{\nu+1},$$

una «serie fondamentale discendente» è della forma

(2) $$\{b_\nu\}, \quad \text{ove } b_\nu \succ b_{\nu+1}.$$

In tutte le nostre considerazioni ν (come pure anche χ, λ, μ) ha il significato d'un numero cardinale finito qualunque oppure anche di un tipo finito rispettivamente d'un numero ordinale finito.

Chiamiamo «*compartecipanti*» (zusammengehörig) due serie fondamentali ascendenti $\{a_\nu\}$ e $\{a'_\nu\}$ contenute in M, e scriviamo

(3) $$\{a_\nu\} \parallel \{a'_\nu\},$$

quando, sia per ogni elemento a_ν esistono elementi a'_λ, tali che

$$a_\nu \prec a'_\lambda,$$

sia ancora per ogni elemento a'_ν esistono elementi a_μ, tali che

$$a'_\nu \prec a_\mu.$$

Chiamiamo «*compartecipanti*» due serie fondamentali discendenti $\{b_\nu\}$ e $\{b'_\nu\}$ contenute in M, e scriviamo

(4) $$\{b_\nu\} \parallel \{b'_\nu\},$$

quando per ogni elemento b_ν esistono elementi b'_λ, tali che

$$b_\nu \succ b'_\lambda,$$

e per ogni elemento b'_ν esistono elementi b_μ, tali che

$$b'_\nu \succ b_\mu.$$

Una serie fondamentale ascendente $\{a_\nu\}$ ed una discendente $\{b_\nu\}$ si chiamano «*compartecipanti*» e si scrive

$$\{a_\nu\} \parallel \{b_\nu\} \ ,$$

1) se per tutti i ν e μ si ha

$$a_\nu \prec b_\mu \ ,$$

2) se in M esiste *al più* un elemento m_0 (cioè o uno solo o nessuno) tale che per tutti i ν sia

$$a_\nu \prec m_0 \prec b_\nu \ .$$

Ciò posto, sussistono i teoremi:

A. «*Se due serie fondamentali sono compartecipanti con una terza, esse sono anche compartecipanti tra loro.*»

B. «*Due serie fondamentali collo stesso verso, di cui l'una sia parte dell'altra, sono sempre compartecipanti.*»

Quando in M esiste un elemento m_0, il quale rispetto alla serie ascendente $\{a_\nu\}$ ha un posto tale, che

1) per ogni ν

$$a_\nu \prec m_0 \ ,$$

2) per ogni elemento m di M, che sia $\prec m_0$, esiste un numero ν_0 siffatto che

$$a_\nu \succ m \quad \text{per} \quad \nu \gtreqqless \nu_0 \ ,$$

noi chiamiamo m_0 «*elemento limite di* $\{a_\nu\}$ *in M*» e nello stesso tempo un «*elemento principale di M*».

Similmente noi chiamiamo ancora m_0 un «elemento principale di *M*» e ad un tempo «elemento limite di b_ν in *M*» quando sono soddisfatte le condizioni:

1) per ogni ν

$$b_\nu \succ m_0 ,$$

2) per ogni elemento *m* di *M*, che sia $\succ m_0$, esiste un certo numero ν_0 siffatto che

$$b_\nu \prec m \quad \text{per} \quad \nu \geqq \nu_0 .$$

Una serie fondamentale *non può mai avere più di un* elemento limite in *M*, ma *M* ha in generale molti elementi principali.

È facile persuadersi della verità dei seguenti teoremi:

C. «*Se una serie fondamentale ha un elemento limite in M, tutte le serie fondamentali con essa compartecipanti hanno lo stesso elemento limite in M.*»

D. «*Se due serie fondamentali (collo stesso verso o con versi opposti) hanno uno stesso elemento limite in M, esse sono compartecipanti.*»

Siano *M* ed *M’* due insiemi ordinati simili, per guisa che

$$\overline{M} = \overline{M'}, \tag{6}$$

e pongasi a fondamento una rappresentazione qualunque dei due insiemi; sussistono, come si vede facilmente, i seguenti teoremi:

E. «*Ad ogni serie fondamentale in M corrisponde come imagine una serie fondamentale in M’, ed inversamente; ad ogni serie ascendente una ascendente; ad ogni discendente una discendente; a serie fondamentali* *compartecipanti in M corrispondono come imagini serie fondamentali compartecipanti in M', e viceversa.*»

F. «*Se una serie fondamentale in M possiede un elemento limite in M, anche la serie fondamentale corrispondente in M' possiede un elemento limite in M', e inversamente; e questi due elementi limiti sono imagini l'uno dell'altro nella rappresentazione.*»

G. «*Agli elementi fondamentali di M corrispondono come imagini elementi fondamentali di M', e inversamente.*»

Se un insieme *M* consta di soli elementi principali, per modo che ognuno dei suoi elementi è un elemento principale, noi lo chiamiamo «*un insieme condensato*»(32*) (insichdichte Menge).

Se per ogni serie fondamentale in *M* esiste un elemento limite in *M*, noi chiamiamo *M* «*un insieme chiuso*» (abgeschlossene Menge).

Un insieme che è ad un tempo condensato e chiuso dicesi «*insieme perfetto*».

Se un insieme ha uno di questi tre predicati, lo stesso predicato spetta eziandio ad ogni insieme simile; quindi gli stessi predicati si possono anche attribuire ai corrispondenti tipi ordinatori, e così vi sono «*tipi condensati*», «*tipi chiusi*», «*tipi perfetti*», come pure «*tipi densi dappertutto*» (§ 9).

Cosi ad es. η è un tipo «condensato»; esso è anche, come fu mostrato al § 9, «dappertutto denso», ma non «chiuso».

ω ed $^*\omega$ non hanno elementi principali (unità principali); per lo contrario $\omega+\nu$ e $\nu+{}^*\omega$ hanno ciascuno un elemento principale e sono «tipi chiusi».

Il tipo $\omega\cdot 3$ ha due elementi principali, ma non è «chiuso»; il tipo $\omega\cdot 3+\nu$ ha tre elementi principali ed è «chiuso».

§ 11. Il tipo ordinatore θ del continuo lineare X.

Passiamo allo studio del tipo ordinatore dell'insieme $X=\{x\}$ di tutti i numeri reali x, che sono ≥ 0 e ≤ 1, nel loro ordine naturale, per guisa che per due elementi arbitrari x e x' si ha

(1) $$x \prec x' \text{ quando } x < x' . \text{(33*)}$$

La notazione di questo tipo sia

$$\overline{X} = \theta \;.$$

Dagli elementi della teoria dei numeri razionali e irrazionali si sa che ogni serie fondamentale $\{x_\nu\}$ in X ha un limite x_0 in X, e che anche inversamente ogni elemento x di X è elemento limite di serie compartecipanti in X. Perciò X è un «*insieme perfetto*» e θ un «*tipo perfetto*».

Ma con ciò θ non è ancora sufficientemente caratterizzato; noi dobbiamo oltre a ciò tener presente la seguente proprietà di X.

X contiene come insieme parziale l'insieme R, studiato al § 9, di tipo ordinatore η, e *particolarmente in modo che tra due elementi qualunque x_0 ed x_1 di X* trovano posto elementi di R.

Ora dobbiamo dimostrare che *queste proprietà prese insieme* caratterizzano completamente il tipo ordinatore θ del continuo lineare X, per guisa che sussiste il teorema:

«*Se un insieme ordinato M ha tale impronta che:* 1) *esso è perfetto,* 2) *in esso è contenuto un insieme S col numero cardinale $\overline{\overline{S}}=\aleph_0$, il quale ha siffatta relazione con M che tra due elementi qualsivogliano m_0 ed m_1 di M trovano posto elementi di S, si ha $\overline{M}=\theta$.*»

DIMOSTRAZIONE.− Se S contenesse un elemento supremo ed un infimo, questi in causa della 2) avrebbero lo stesso carattere anche come elementi di M; noi potremmo allora sopprimerli da S senza che perciò quest'insieme perda la relazione con M espressa nella 2).

Noi supponiamo perciò fin da principio che S sia senza elemento supremo od infimo; allora S ha, per il § 9, il tipo ordinatore η. Perchè, essendo S una parte di M, tra due elementi arbitrarii s_0 e s_1 di S debbono per la 2) trovar posto altri elementi di S; inoltre si ha per la 2) $\overline{\overline{S}}=\aleph_0$. I due insiemi S ed R sono dunque «*simili*»,

$$S \simeq R \,. \tag{2}$$

Imaginiamo ora stabilita una qualunque «*rappresentazione*» di R su S; asseriamo che essa fornisce ad un tempo una «*rappresentazione*» di X su M, e precisamente nella maniera che segue.

Tutti gli elementi di X, che appartengono ad un tempo all'insieme R, si fanno corrispondere come imagini a quegli elementi di M, che sono ad un tempo elementi di S e che, per la rappresentazione stabilita di R su S, corrispondono a quegli elementi di R.

Ma se x_0 è un elemento di X non appartenente a R, esso si può riguardare come elemento limite d'una serie fondamentale $\{x_\nu\}$ contenuta in X, la quale può essere sostituita con una serie fondamentale $\{r_{\chi_\nu}\}$ compartecipante con essa contenuta in R. A quest'ultima corrisponde come imagine una serie fondamentale $\{s_{\lambda_\nu}\}$ in S e M, la quale per la 1) è limitata da un solo elemento m_0 in M, che non appartiene ad S (F, § 10). Questo elemento m_0 in M (che rimane lo stesso, quando in luogo delle serie fondamentali $\{x_\nu\}$ e $\{r_{\chi_\nu}\}$ se ne pensano altre limitate dallo stesso elemento x_0 in X [E, C, D, § 10]) serve come imagine di x_0 in X. Inversamente, ad ogni elemento m_0 di M, che non si trova in S, corrisponde un ben determinato elemento x_0 di X, che non appartiene ad R, e del quale m_0 è l'imagine.

In questa maniera viene stabilita una relazione reciprocamente univoca tra X ed M, la quale bisogna dimostrare che costituisce una «rappresentazione» di questi insiemi.

Ciò sussiste anzitutto per quegli elementi di X ed M che appartengono ad un tempo agli insiemi R ed S rispettivamente.

Confrontiamo ora un elemento r di R con un elemento x_0 di X non appartenente ad R; i corrispondenti elementi di M siano s ed m_0 .

Se è $r<x_0$, esiste una serie fondamentale $\{r_{\chi_\nu}\}$ ascendente limitata da x_0 , e per un certo valore ν_0 si ha

$$r< r_{\chi_\nu} \quad \text{per} \quad \nu \overline{\overline{>}} \nu_0 .(34^*)$$

L'imagine di $\{r_{\chi_\nu}\}$ in M è una serie fondamentale ascendente $\{s_{\lambda_\nu}\}$ limitata in M da m_0, e si ha (§ 10) in primo luogo $s_{\lambda_\nu} \prec m_0$ per ogni ν ed in secondo luogo $s \prec s_{\lambda_\nu}$ per $\nu \overline{\overline{>}} \nu_0$, perciò (§ 7) $s \prec m_0$.

Se è $r>x_0$, si conchiude similmente che $s \succ m_0$.

Consideriamo finalmente due elementi x_0 ed x'_0 non appartenenti ad R e gli elementi m_0 ed m'_0 ad essi corrispondenti in M; con un procedimento analogo si dimostra che, se $x< x'_0$ si ha $m_0 \prec m'_0$.

Con ciò risulta dimostrata la similitudine di X ed M, e quindi si ha

$$\overline{M}=\theta \ .$$

Halle, marzo 1895.

Note per l'edizione elettronica Manuzio

(a cura di Roberto Rogai)

*Le note di questa sezione sono segnalate da un *. Le altre sono quelle presenti nel testo di riferimento.*

§§§§§

In alcune poche formule dell'edizione italiana erano presenti errori di stampa: sono stati direttamente corretti, tramite confronto col testo originale tedesco, senza appesantire ulteriormente queste note, se non facendone talvolta cenno.

(1*) Hypotheses non fingo

È la celeberrima frase di Newton ("Non invento ipotesi") che si trova nella seconda edizione dei Philosophiae Naturalis Principia Mathematica e con la quale il grande fisico intendeva dire che non bisogna introdurre delle ipotesi arbitrarie (naturali o metafisiche) per quei fenomeni di cui è ignota la causa. *(torna a p. 6)*

(2*) ...prolatas excipimus et describimus

"Noi infatti non diamo leggi all'intelletto o alle cose secondo il nostro arbitrio, ma come scribi fedeli riceviamo e descriviamo quelle fornite e presentate dal linguaggio stesso della natura". Traspare da questo motto la visione platonica che Cantor aveva degli enti matematici, secondo la quale il matematico non "inventa" i propri enti, ma li

"scopre", essendo essi preesistenti alla descrizione che egli ne dà. *(torna a p. 6)*

(3*) ...longioris aevi diligentia

"Verrà un tempo in cui ciò che ora è nascosto sarà portato alla luce, tramite l'attento studio di altre generazioni". La citazione è tratta dalle "Naturales quaestiones" di Seneca. *(torna a p. 6)*

(4*) Ogni elemento m di un insieme M si può combinare con ogni elemento n di un altro insieme N in un nuovo elemento (m, n)

Per esempio, se M={1, 2, 3} e N={4, 5} $\Rightarrow$ *M·N={(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)}. Chiaramente, nel caso di insiemi finiti come quelli qui sopra,* $\overline{\overline{M}} \cdot \overline{\overline{N}} = \overline{\overline{M \cdot N}}$ *e questo può giustificare la denominazione di "insieme prodotto".* *(torna a p. 13)*

(5*) funzione di ricoprimento

Quindi in generale tale funzione non è né "iniettiva", né "suriettiva". *(torna a p. 15)*

(6*) ((N | M) . (P | M)) ~ ((N , P) | M)

Nell'edizione italiana (ma non in quella tedesca!) si riporta ((N | M) . (P | M)) ~ ((N . P) | M), ma è un errore. Controlliamo in un semplicissimo esempio su insiemi finiti la validità del teorema: sia N=(1, 2) (quindi $\overline{\overline{N}} = 2$*), M=(3, 4, 5, 6) (quindi* $\overline{\overline{M}} = 4$*). Quanti coprimenti (nel senso di Cantor) sono possibili?*

Se f(1)=3, allora f(2)=3 opp. f(2)=4 opp. f(2)=5 opp. f(2)=6;
se f(1)=4, allora f(2)=3 opp. f(2)=4 opp. f(2)=5 opp. f(2)=6;
se f(1)=5, allora f(2)=3 opp. f(2)=4 opp. f(2)=5 opp. f(2)=6;
se f(1)=6, allora f(2)=3 opp. f(2)=4 opp. f(2)=5 opp. f(2)=6.
Dunque, in totale sono possibili 16 coprimenti, cioè 4^2, *e in generale* $\overline{\overline{M}}^{\overline{\overline{N}}}$.
Quindi la cardinalità di (N | M) è $\overline{\overline{M}}^{\overline{\overline{N}}}$ *e quella di (P | M) è* $\overline{\overline{M}}^{\overline{\overline{P}}}$.
Ovviamente (basta riflettere sulle definizioni di somma e prodotto di insiemi), la cardinalità del prodotto di due insiemi A e B (cioè A.B) è $\overline{\overline{A}} \;.\; \overline{\overline{B}}$ *e la cardinalità della somma di due insiemi A e B (cioè (A, B)) è* $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}$.
Da tutto ciò, segue:
$\overline{\overline{((N|M).(P|M))}} = \overline{\overline{(N|M)}}.\overline{\overline{(P|M)}} = \overline{\overline{M}}^{\overline{\overline{N}}} \;.\; \overline{\overline{M}}^{\overline{\overline{P}}}$ $= \overline{\overline{M}}^{\overline{\overline{N+P}}} = \overline{\overline{((N,P)|M)}}$ *cioè l'equivalenza dei due insiemi ((N | M) . (P | M)) e ((N , P) | M), c.v.d.*
Attenzione: queste argomentazioni si riferiscono solo a insiemi <u>finiti</u>. *(torna a p. 17)*

(7*) tutti i numeri reali *x* che sono ≥ 0 e ≤ 1

Il testo di riferimento riporta ≥ 0 e < 1, ma si tratta di un errore: anche nel testo originale tedesco c'è ≥ 0 e ≤ 1. *(torna a p. 17)*

(8*) $x=\frac{f(1)}{2^1}+\frac{f(2)}{2^2}+\ldots+\frac{f(\nu)}{2^\nu}+\ldots$

Nel testo di riferimento è riportata la formula $x=\frac{f(1)}{1}+\frac{f(2)}{2^2}+\ldots+\frac{f(\nu)}{2^\nu}+\ldots$, *ma si tratta di un* *errore, come è anche confermato dal testo tedesco; la formula corretta è quella di sopra.*

Infatti, come dice il testo, l'espressione vorrebbe rappresentare tutti i numeri reali compresi fra 0 e 1 (estremi inclusi), dove la f(n) può assumere il valore di 0 oppure di 1. Basta prendere f(1)=f(2)=1 e f(x)=0 per tutti gli altri valori di x e l'espressione darebbe 1+1/4=5/4 che è maggiore di 1! Invece nella formula corretta se tutte le f(n) assumono il valore 0, l'espressione dà 0 (il minimo numero possibile), mentre se tutte le f(n) assumono il valore di 1, l'espressione vale 1 (il numero massimo possibile): notoriamente, infatti, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ *. Per tutte le altre possibili combinazioni dei valori di f(n), si ottiene un numero compreso fra 0 e 1. Si tratta, in sostanza, di rappresentare il numero in base 2. Come esempio, si voglia rappresentare il numero decimale 0,25. Si dovrebbe porre f(1)=0, f(2)=1 e f(n)=0 per n>=3, ottenendo* $x = \frac{0}{2^1} + \frac{1}{2^2} + 0 + 0 + \ldots$ = $\frac{1}{4}$ = *0,25. Si osservi che questo esempio non dà l'idea del caso generale, poiché un numero decimale <u>finito</u> in base 10 potrebbe dar luogo, scritto in base 2, ad un numero <u>periodico.</u> Per esempio, 0,7=* $\frac{7}{10}$ *sarebbe 0,1011(0011), con la parte periodica 0011 che si ripete indefinitamente.* *(torna a p. 17)*

(9*) $x=\frac{2\nu+1}{2^{\mu}}$ **< 1**

Se $\frac{2\nu+1}{2^{\mu}}$ *deve essere minore di 1, deve aversi* $2\nu+1$ < 2^{μ} *, con* ν *= 0, 1, 2, ...,* μ *= 1, 2, ... Che valori ha in mente Cantor? Per esempio, per* ν *= 0, =* μ *= 1, si ha x=1/2. Perché dice che numeri di tale forma "vengono rappresentati in due modi"? Per esempio,* $\frac{1}{2}$ *, in rappresentazione binaria è evidentemente 0,1; ma è anche 0,01111..., con la parte periodica "1" che si ripete all'infinito: infatti, 0,0(1)=* $\frac{0}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots$ = $0+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ = $\frac{1}{2}$ *. Dunque, la rappresentazione binaria di frazioni che (in rappresentazione decimale!) hanno una potenza di 2 a denominatore e a numeratore un numero dispari (cioè, della forma* $2\nu+1$ *) e minore del denominatore "vengono rappresentati in due modi". Come esempio a ulteriore chiarificazione, si consideri la frazione* $\frac{7}{8}$ = $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{8}$ *= 0,111 (in binario!). Essa può anche rappresentarsi come 0,01111...., cioè 0,0(1), con 1 periodico. In altre parole, tutti i numeri compresi fra 0 e 1 che in notazione binaria si possono scrivere come 0, seguito da n volte "1", possono anche rappresentarsi come 0,0 seguito da una successione illimitata di "1". Ciò non dovrebbe particolarmente sorprendere, perché, se pensiamo all'usuale rappresentazione decimale, è noto che, per esempio, 3/100 può essere scritto sia come 0,03, sia come*

0,029999...., cioè 0,2(9), con il 9 che si ripete indefinitamente. Non è qui il caso di generalizzare ulteriormente tali risultati. *(torna a p. 17)*

(10*) $2^{\aleph_0}=\overline{\overline{(\{s_\nu\},X)}}$

Qui a secondo membro abbiamo la potenza dell'insieme unione dei reali fra 0 e 1 con $\{s_\nu\}$ *che è l'insieme numerabile di quelli che hanno una "doppia rappresentazione". Poiché* $2^{\aleph_0}$ *è, per la (4) del § 4, l'insieme delle funzioni che hanno dominio nei naturali e codominio nell'insieme* $2=\{0,1\}$ *, si intende che esso è isomorfo alle successioni infinite di "0" e di "1". Esempi di elementi di tale insieme sono (001011100...), (11000110001...); in sostanza si tratta delle successioni illimitate di "0" e "1", cioè proprio quelle che definiscono gli elementi dell'insieme a secondo membro, come abbiamo visto appena sopra.* *(torna a p. 17)*

(11*) $X=(\{t_\nu\},X_1)=(\{t_{2\nu-1}\},\{t_{2\nu}\},X_1)$

Per comprendere la dimostrazione che segue, è necessario approfondire la simbologia usata da Cantor. Con $\{t_\nu\}$*, come dice egli stesso, intende un qualunque insieme numerabile. Si capisce quindi che la notazione sta per* $\{t_1, t_2, t_3, ..., t_\nu, ...\}$*, dove* $\nu = 1, 2, ...$*, cioè* $\nu\in\mathbb{N}$. *Quindi* $\{t_{2\nu-1}\}$ *sta per* $\{t_1, t_3, t_5, ..., t_{2\nu-1}, ...\}$*, cioè l'insieme degli elementi di sopra, occupanti le posizioni "dispari". Similmente,* $\{t_{2\nu}\}$ *è l'insieme degli elementi di posizione "pari"; ora ovviamente*

(1) $\{t_\nu\}=\{t_{2\nu-1}\}\cup\{t_{2\nu}\}$ *, per costruzione.*

Veniamo ora a $\{s_\nu\}$ che è l'insieme (numerabile) dei numeri della forma $\frac{2\nu+1}{2^\mu} < 1$ *, cioè con* $2\nu+1 < 2^\mu$ *(ν = 0, 1, 2, ...; μ = 1, 2, 3, ...). Come si vede, a denominatore vi sono le potenze di 2 (2, 4, 8, ...), mentre a numeratore vi sono numeri dispari minori del denominatore. Quindi i primi numeri sono 1/2, 1/4, 3/4, 1/8, 3/8, 5/8, 7/8, 1/16, 3/16, ecc. Dovrebbe essere evidente che anche un tale insieme è numerabile.*

Veniamo ora alla prima eguaglianza $X=(\{t_\nu\}, X_1)$ che in notazione moderna è

(2) $X=\{t_\nu\}\cup X_1$ *;*

l'uguaglianza è ovvia per costruzione dato che per ipotesi di Cantor è $X_1=X-\{t_\nu\}$ *.*

Passiamo ora alla $\{t_\nu\}\cup X_1=\{t_{2\nu-1}\}\cup\{t_{2\nu}\}\cup X_1$ *, che deriva direttamente dalla (1).*

La $\{s_\nu\}\cup X=\{s_\nu\}\cup\{t_\nu\}\cup X_1$ *è conseguenza immediata della (2).*

(3) $\{t_{2\nu-1}\}\sim\{s_\nu\}$ e

(4) $\{t_{2\nu}\}\sim\{t_\nu\}$

sono ovvie, dato che i quattro insiemi citati sono equipotenti, poiché tutti numerabili.

Dalla (2), usando le (3) e (4), si deduce quindi, esplicitando pedissequamente quanto lasciato sottinteso da Cantor:

$$X=\{t_\nu\}\cup X_1 = \{t_{2\nu-1}\}\cup\{t_{2\nu}\}\cup X_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad X \sim \{t_{2\nu-1}\}\cup\{t_{2\nu}\}\cup X_1 \sim \{s_\nu\}\cup\{t_\nu\}\cup X_1 = \{s_\nu\}\cup X$$ *, cioè*

$$X \sim \{s_\nu\}\cup X.$$

Quest'ultima dice che se all'insieme X (che ha la potenza del continuo) si aggiunge l'insieme numerabile s_ν *non si va oltre la potenza del continuo stesso, ma si ottiene ancora un insieme della stessa potenza. Quindi, in altre parole, ai fini della cardinalità dell'insieme X, il fatto che vi siano alcuni reali fra 0 e 1 che sono passibili di una "doppia rappresentazione" è irrilevante; perciò* $2^{\aleph_0}=\overline{\overline{X}}=o$.
(torna a p. 18)

(12*) quadrando

Attenzione al fatto che qui si parla di "moltiplicazione fra insiemi", secondo la definizione datane con la (6) del § 3.
(torna a p. 18)

(13*) Se M è un insieme cosifatto che non ha potenza eguale a quella di alcuno dei suoi insiemi parziali

Qui per "insiemi parziali" si deve intendere naturalmente "sottoinsiemi propri di M", poiché chiaramente ogni insieme M ha potenza eguale a se stesso. Cantor per "insieme parziale" o "parte di un insieme" intende "sottoinsieme proprio". *(torna a p. 20)*

(14*) aggiungendovi un unico elemento e

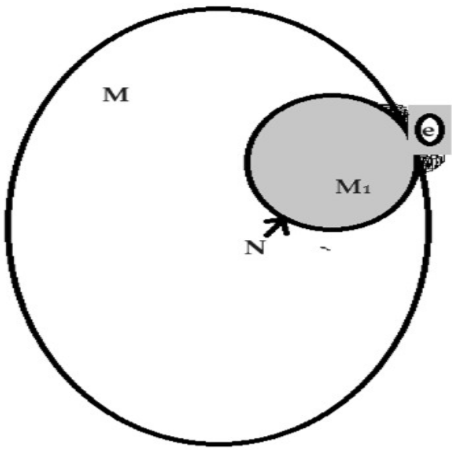
Questo elemento aggiunto quindi non deve appartenere ad M. *(torna a p. 20)*

(15*) Dimostrazione di D

Espongo una dimostrazione con l'attuale simbologia.
L'ipotesi è che M non è equivalente a nessun suo sottoin-

sieme proprio. La tesi è che non lo sia nemmeno l'insieme $M \cup \{e\}$ *con* $e \notin M$. *Seguiamo la casistica di Cantor.*

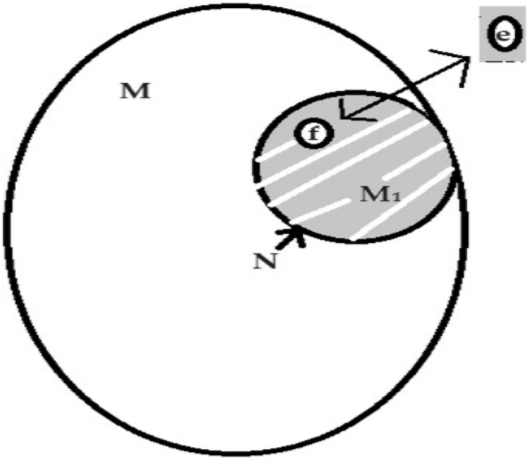
<u>I caso (v. figura sotto)</u>: sia $N \subset (M \cup \{e\})$ *, con* $e \in N$. *(con* $\subset$ *intendiamo l'inclusione <u>propria</u>). Dobbiamo mostrare che N non è equivalente a* $M \cup \{e\}$. *Supponiamo per assurdo che lo sia: N ~* $M \cup \{e\}$. *Da qui:* $N - \{e\} \sim (M \cup \{e\}) - \{e\} = M$, *poiché* $e \in N, e \in (M \cup \{e\})$. *Cioè* $N - \{e\}$ *~ M, il che è assurdo poiché* $N - \{e\} \subset M$ *(poiché l'unico elemento di N che non appartenga a M è {e}) e per ipotesi ogni sottoinsieme di M non è equivalente a M. Dunque N non può essere equivalente a* $M \cup e$.



I caso: "e" appartiene a N

<u>II caso (v. figura sotto)</u>: sia $N \subset (M \cup e)$, *con* $e \notin N$. *Anche qui dobbiamo mostrare che N non è equivalente a* $M \cup e$ *. Supponiamo ancora per assurdo che sia invece*

$N \sim M \cup e$. Data la supposta equivalenza, $\exists!\, f \in N : f$ è in relazione con e. Allora $(N - \{f\}) \cup \{f\} = N \sim M \cup e \Rightarrow$ (togliendo i due elementi corrispondenti "f" ed "e" rispettivamente dal primo e dall'ultimo membro) $\Rightarrow (N - \{f\}) \sim M$, poiché $f \in (N - \{f\}) \cup \{f\}$ ed $e \in M \cup e$. Questo è assurdo poiché $N - \{f\} \subset M$ e per ipotesi ogni sottoinsieme di M non è equivalente a M. Dunque N non è equivalente a $M \cup e$. *(torna a p. 21)*



II caso: "e" non appartiene a N

(16*) esso sussiste per il successivo $\nu+1$.

In questa dimostrazione per induzione, parrebbe che Cantor abbia dimenticato il passo iniziale ($\nu=2$), visto che $\nu=1$ va escluso, dato che Cantor non considera l'insieme vuoto. Del resto, la dimostrazione è davvero banale: se

E_2=(e_0, e_1), allora E'={e_0} oppure E'={e_1} e in entrambi i casi $\overline{E'}=1$. E inoltre la riporta all'inizio della successiva dimostrazione di A. *(torna a p. 22)*

(17*) anche tutti i numeri maggiori

Nel testo di riferimento si dice "anche tutti i numeri maggiori di ν_1", ma non solo questa aggiunta è del tutto inopportuna (poiché già si è osservato che ν_1+1 non può appartenere a J), ma essa non è, correttamente, presente nel testo originale tedesco ("und folglich auch alle grösseren Zahlen nicht zu J gehören"). *(torna a p. 24)*

(18*) tra i due si può stabilire una relazione reciprocamente univoca

In sostanza, si "sposta" e_0 al primo posto (l'ordine qui non è importante!) e lo si fa corrispondere a "1", "1" a "2", "2" a "3", ecc. Primo esempio del fatto che negli insiemi transfiniti è a volte possibile aggiungere elementi senza variare la cardinalità. In altre parole, una parte propria dell'insieme può essere equivalente all'insieme stesso (proprietà caratteristica degli insiemi transfiniti). *(torna a p. 25)*

(19*) Se con una legge qualunque si sopprime da T...

Notiamo che qui come altrove Cantor fa un uso "implicito" dell'assioma di scelta ma ciò non deve sorprendere, data l'epoca in cui scrive. *(torna a p. 26)*

(20*) Ora si ha evidentemente

Qui Cantor usa lo stesso metodo usato in precedenza (v. §

4, nota 3), suddividendo l'insieme dei naturali in pari e dispari e considerando che ciascuno dei due ha cardinalità $\aleph_0$. *(torna a p. 27)*

(21*) L'equazione (6) può anche scriversi

Si tenga presente la definizione di prodotto fra insiemi, data al § 3. *(torna a p. 27)*

(22*) *Per cui* $\mu + \nu = \rho$

"Per cui" va inteso nel senso di "per i quali" e non di "perciò, quindi", come risulta dall'originale tedesco "für welche". *(torna a p. 28)*

(23*) $\lambda = \mu + \dfrac{(\mu + \nu - 1)(\mu + \nu - 2)}{2}$

Ad esempio, l'elemento (3,1) si trova al $3 + \dfrac{(3+1-1)(3+1-2)}{2} = 6^o$ *posto. Una semplice dimostrazione può essere la seguente. Poniamo con Cantor* $\rho = \mu + \nu$*. Si ha la seguente successione, dall'alto in basso e da sinistra a destra:*

ρ=2	[1,1]					
ρ=3	[1,2]	[2,1]				
ρ=4	[1,3]	[2,2]	[3,1]			
ρ=5	[1,4]	[2,3]	[3,2]	[4,1]		

ρ=6	[1,5]	[2,4]	[3,3]	[4,2]	[5,1]	
ρ=7	[1,6]	[2,5]	[3,4]	[4,3]	[5,2]	[6,1]
...						

Si consideri ora un qualsiasi elemento della colonna in grigio, per esempio [1,5]. E' chiaro che nella successione esso è preceduto da 1+2+3+4=10 elementi. In generale, un tale elemento sarà preceduto da 1+2+3+...+(ρ-2) elementi, la cui somma dà notoriamente $\frac{(1+\rho-2)(\rho-2)}{2}$ (*). *Se ora si considera un altro elemento della stessa riga, p. es. [4,2], è ovvio che per trovare da quanti elementi esso è preceduto basterà sommare ai precedenti quelli che lo precedono nella propria riga, cioè 3; in generale, bisognerà aggiungere μ-1 elementi; dunque il generico elemento [μ,ν] è preceduto da* $\frac{(1+\rho-2)(\rho-2)}{2}+\mu-1$ *elementi e dunque si trova al posto* $\frac{(1+\rho-2)(\rho-2)}{2}+\mu$ *-esimo e, considerando che $\rho=\mu+\nu$, si trova la formula* $\frac{(\mu+\nu-1)(\mu+\nu-2)}{2}+\mu$ *che si voleva dimostrare.*

(*) *Se qualcuno non conoscesse la semplice relazione*

$\sum_{1}^{n} m = \frac{n(1+n)}{2}$ *la si può dimostrare per induzione, poiché essa è ovviamente vera per n=1, mentre se la si suppone vera per n lo è per n+1:*

$$\sum_{1}^{n+1} m = (n+1) + \sum_{1}^{n} m = (n+1) + \frac{n(1+n)}{2} =$$
$$= \frac{2(n+1)+n(1+n)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Se si preferisce una modalità più "costruttiva", si può ragionare come il piccolo Gauss, raggruppando gli addendi della somma: il primo con l'ultimo, il secondo col penultimo, ecc. così nel caso di n pari: $\sum_{1}^{n} m = 1+2+3+\ldots+n =$

$= (1+n)+(2+n-1)+(3+n-2)+\ldots+(\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+1)$ *. Ciascuno degli addendi fra parentesi vale (1+n) ed essi sono in tutto* $\frac{n}{2}$ *e dunque la sommatoria vale* $\frac{n}{2}(1+n)$ *. Se n è dispari, n-1 sarà pari e per esso si può usare la formula appena trovata:* $\sum_{1}^{n} m = n + \sum_{1}^{n-1} m = n + \frac{(n-1)n}{2} =$

$$= \frac{2\mathrm{n}+(n-1)n}{2} = \frac{n+n^2}{2} = \frac{n(1+n)}{2}$$ *.* *(torna a p. 29)*

(24*) $\mathbf{m_1 \prec m_2,\ \ m_2 \succ m_1}$

Per la differenza di significato fra i simboli " $\prec$ *" e "<" (e analogamente "* $\succ$ *" e ">"), si veda la nota 33 più avanti.* *(torna a p. 31)*

(25*) ***la chiamiamo brevemente classe tipica [a]***

Faccio notare che nel testo tedesco, la "a" è indicata con il corrispondente carattere gotico e questo evita la confusione che potrebbe essere ingenerata dall'usare lo stesso tipo di carattere adoperato per gli elementi di un insieme. Mi attengo comunque al testo di riferimento italiano. *(torna a p. 35)*

(26*) «Grundzüge der Geometrie, Deutsch von A. Schepp, Leipzig 1894»

Si tratta della traduzione in tedesco a cura di Adolf Schepp dell'opera di Giuseppe Veronese "Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee". *(torna a p. 39)*

(27*) Ztschr. f. Philos. u. philos. Kritik

L'abbreviazione sta per "Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik" (Periodico per la filosofia e la critica filosofica). *(torna a p. 39)*

(28*) Che intende egli mai colla sua aggiunta non uguale ad una parte dell'altro?

Consultando il testo di Veronese, si ha la netta sensazione che qui vi sia un fraintendimento fra i due matematici, o meglio che vi sia all'origine una diversa definizione di numero. Mentre Veronese non considera simili due insiemi se essi, pur potendo essere messi in una corrispondenza biunivoca e che inoltre mantiene l'ordine degli elementi, sono tali che "l'uno (...) è parte (...) dell'altro", tali essi so-

no invece per Cantor. Forse un semplicissimo esempio può chiarire.
Si considerino i due insiemi costituiti l'uno dai razionali compresi fra 0 e 1, l'altro dai razionali compresi fra 0 e 2, in entrambi i casi estremi inclusi. (Mi limito ai razionali per restare nell'ambito della cardinalità $\aleph_0$ *). Essi possono essere posti in corrispondenza biunivoca dalla semplice applicazione* $f(x) = 2x$ *e, inversamente,* $f(y) = \frac{1}{2}y$*, dove* $x \in [0,1], y \in [0,2]$ *. Per esempio, a* $\frac{8}{9} \in [0,1]$ *corrisponde il suo doppio* $\frac{16}{9} \in [0,2]$ *e viceversa. È evidente che si tratta di una corrispondenza biunivoca fra i due insiemi che inoltre mantiene anche l'ordine, poiché se* $a, b \in [0,1], a < b \Rightarrow 2a < 2b$ con $2a, 2b \in [0,2]$ *. Ma è anche [0, 1] strettamente contenuto in [0, 2]. Dunque i due insiemi sarebbero simili per Cantor, ma non per Veronese. La polemica si protrasse per anni, ma oggi la posizione di Cantor è quella universalmente accettata.* *(torna a p. 39)*

(29*) Fontenelle nella sua «Géométrie de l'infini, Paris 1727»

Si tratta degli "Élements de la géométrie de l'infini" di Bernard le Bovier de Fontenelle, scrittore francese (1657 – 1757). *(torna a p. 40)*

(30*) W. Killing

Wilhelm Killing, matematico tedesco (1847 – 1923).

(torna a p. 40)

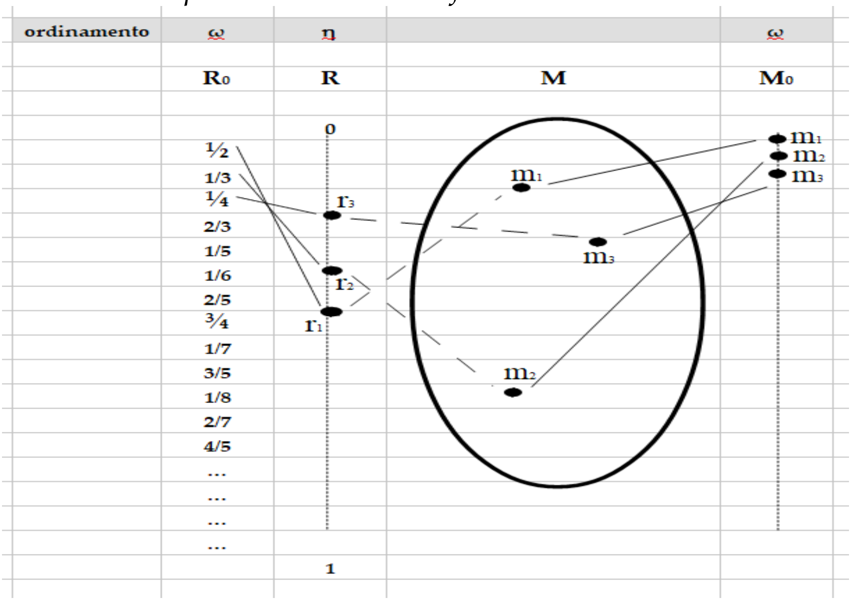
(31*) sussiste il seguente teorema

Si tratta di uno dei più importanti di questo scritto e fornisce una caratterizzazione dei razionali compresi fra 0 e 1. Ricordo che in matematica il termine "caratterizzazione" ha un senso ben preciso: in questo caso vuol dire che l'insieme R in questione ha certe proprietà e che se viceversa un insieme M ha quelle proprietà esso "coincide" (per gli aspetti che qui interessano) con R, cioè è a questo "isomorfo".

Nella dimostrazione di Cantor intervengono due insiemi, fra loro equipotenti, ma ciascuno pensato ordinato secondo due tipi d'ordinamento diversi. I due insiemi sono l'insieme R (razionali fra 0 e 1, estremi esclusi) e un insieme M con le tre caratteristiche elencate. R viene considerato secondo due tipi di ordinamento differenti: il suo ordinamento naturale, secondo la grandezza dei numeri (da Cantor detto η), e quello definito al § 7 (vedi), secondo la somma p+q di numeratore e denominatore (da Cantor detto ω); in questo secondo caso è chiamato R_0. È fondamentale capire che R e R_0 sono <u>costituiti dagli stessi elementi</u>, solo in ordine diverso. I primi elementi di R_0 sono 1/2, 1/3, 1/4, 2/3, 1/5, 1/6, 2/5, 3/4, 1/7, 3/5, 1/8, 2/7, 4/5, … Proprietà fondamentale di R_0 (che non è posseduta da R) è che qualunque suo sottoinsieme ammette un minimo (nel suo ordinamento!), mentre l'ordinamento di R non gode di questa proprietà: p. es. l'insieme dei razionali maggiori di

1/3 <u>non</u> ammette un minimo.
A sua volta, anche M viene pensato secondo due tipi di ordinamento. Ma andiamo con ordine. L'ipotesi è che M possieda le tre proprietà citate da Cantor. La tesi è che M abbia il tipo ordinatore η, sopra descritto. Poiché M è equipotente ad R per ipotesi, le uniche considerazioni che dobbiamo fare sono relative all'ordine. Si considerino i tre insiemi R_0, R e M: qui sotto una rappresentazione grafica solo come ausilio per fissare le idee.
Nonostante R e R_0 abbiano gli stessi elementi, il primo è dappertutto denso, il secondo no (p. es. fra 2/5 e 3/4 non vi sono elementi). Questa situazione può apparire paradossale, ma è conseguenza del diverso ordinamento dei razionali fra 0 e 1. Fra R e R_0 vi è una naturale corrispondenza biunivoca, che fa corrispondere un razionale a sé stesso, come mostrato in figura per i soli primi tre elementi di R_0. Si osservi il diverso ordinamento: p. es. in R_0 3/4 viene prima di 1/8, mentre in R viene dopo, essendo 1/8<3/4. Per ipotesi, vi è corrispondenza biunivoca fra R e l'insieme ordinato M (tratteggiata in figura). Cantor afferma che "Per la condizione 1) M si può mettere sotto la forma di un insieme ben ordinato del tipo ω". Come si potrebbe fare? Consideriamo R_0. Al suo primo elemento 1/2 corrisponde 1/2 (sé stesso) in R; ad 1/2 corrisponda m_1 in M (per la supposta corrispondenza biunivoca fra i due insiemi): sia dunque m_1 il primo elemento di M_0; si proceda in tal modo per 1/3, 1/4, ecc. (il secondo, il terzo, ecc. elemento di R_0) determinando m_2, m_3, ecc. E così ordinando in M_0 (che,

ricordiamo, non è altro che M riordinato) tutti gli elementi di M. Poiché fra un insieme ordinato e l'altro vigono corrispondenze biunivoche, siamo certi di prendere tutti gli elementi di M che resta in tal modo ordinato col tipo ω. Chiaramente, l'ordine che si determina in M_0 dipende dalla corrispondenza biunivoca fra R e M.



Osserviamo che ogni sottoinsieme di M_0, come avviene per R_0, ammette sempre un elemento minimo, essendo di ordinamento ω. Questo è fondamentale per il seguito, poiché tali ordinamenti verranno usati per la dimostrazione.
Tenendo presente quanto sopra, ora "dobbiamo dimostrare che M si può rappresentare su R in guisa che la relazione di posto tra due elementi qualunque in M è la stessa che la relazione di posto tra i due elementi corrispondenti in R", per usare le parole di Cantor. Quindi dobbiamo ora mo-

strare che si può stabilire una corrispondenza biunivoca fra M e R tale che mantenga l'ordine degli elementi, cioè tale che $\forall r_1, r_2 \in R,\ \ r_1 < r_2 \ \Rightarrow$ $m_1 = f(r_1) < m_2 = f(r_2)$ *, essendo f tale corrispondenza.*

Preso dunque r_1 in R, ad esso corrisponde m_1 in M (una tale corrispondenza esiste poiché per ipotesi $\overline{\overline{M}} = \aleph_0$*); considerato poi r_2 in R, dobbiamo ora associare ad esso un elemento di M che abbia la stessa relazione di posto che ha r_2 rispetto a r_1: per far questo, consideriamo gli infiniti elementi di M che godono di questa proprietà (certamente esistenti, perché M non ha né minimo, né massimo) e fra questi scegliamo quello che, nell'ordinamento ω di M_0, è il minimo, chiamiamolo m_{ι_2} e associamolo a r_2. Così proseguendo e sfruttando anche il fatto che M è dappertutto denso (e dunque fra due qualunque elementi di M ne esistono infiniti fra essi compresi nell'ordinamento di M), costruiamo due successioni: r_1, r_2,..., r_ν,... e m_1, m_{ι_2},..., m_{ι_ν},... la prima di elementi di R, la seconda di elementi di M fra loro rispettivamente associati e tali da mantenere l'ordine. (Osservo che nel testo di riferimento è presente un errore: dove si dice "coordiniamolo a r_3" era riportato m_3). È importante notare che tale algoritmo di costruzione delle due successioni in R e in M (una volta fissata una particolare corrispondenza biunivoca fra i due insiemi) è completamente "meccanico", nel senso che determina univocamente le due successioni, grazie ogni volta alla scelta del "minimo" fra gli infiniti elementi possibili, il che fissa* *univocamente la scelta. A questo punto, immaginiamo compiuto tale processo di associazione fra ν elementi di R e ν elementi di M, sempre mantenendo l'ordine. Rimane però ancora un problema: come possiamo essere certi che in tal modo vengono coinvolti tutti gli elementi di M? La domanda non è oziosa, perché si è altrove visto che è caratteristica degli insiemi infiniti poter essere messi in corrispondenza biunivoca con un proprio sottoinsieme; dunque, potremmo anche solo aver costruito una corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme proprio di M che mantiene l'ordine. Per rispondere a quest'ultimo dubbio, Cantor ricorre al procedimento di induzione completa e afferma di voler mostrare che "se nella rappresentazione si impiegano gli elementi m_1, m_2, … , m_ν lo stesso avviene anche per l'elemento seguente $m_{\nu+1}$", intendendo che se gli elementi m_1, m_2, … , m_ν sono già stati fatti rispettivamente corrispondere a r_1, r_2, … , r_ν (sia gli r, sia gli m corrispondenti sono in numero finito), allora, scelto un ulteriore elemento $m_{\nu+1}$, è possibile trovare un r in R (diverso dai precedenti) tale che esso corrisponda a $m_{\nu+1}$. Riprendiamo ora Cantor: "Sia λ così grande che tra gli elementi*

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\lambda}$$

si trovino gli elementi

$$m_1, m_2, \ldots, m_\nu \quad ,$$

(i quali per ipotesi compariscono nella rappresentazione)." Osserviamo che tale λ certamente esiste poiché gli elemen-

ti $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ *sono in numero <u>finito</u> ed erano già stati associati ai corrispondenti r. Quindi, basterà prendere* λ *abbastanza grande da soddisfare la detta proprietà. Ora Cantor distingue due casi: 1) Può avvenire che tra essi si trovi anche* $m_{\nu+1}$*, e allora* $m_{\nu+1}$ *era già stato impiegato nella corrispondenza. E con ciò il teorema sarebbe stato dimostrato.*

2) Ma se $m_{\nu+1}$ *non vi si trova, Cantor procede su R specularmente rispetto a quanto fatto su M, sfruttando ora però l'ordinamento* ω *di* R_0*, come si capisce bene dal testo.*

Osserviamo infine che l'algoritmo ideato da Cantor considera i due insiemi R e M per così dire "alternativamente":

- *prendiamo* r_1 *in R, associamo ad esso* m_1 *in M*
- *….*
- *prendiamo* r_ν *in R, associamo ad esso* m_ν *in M*
- *domanda: considerato un elemento qualsiasi in M, lo abbiamo già associato? Sì: allora possiamo essere soddisfatti*
- *No: allora chiamiamo* $M_{\nu+1}$ *questo elemento e con il solito sistema (sfruttando l'ordinamento di* R_0*) troviamo* $r_{\lambda+\sigma}$ *che corrisponde a* $M_{\nu+1}$*, mantenendo l'ordine rispettivo per tutti gli elementi già associati.*

Insomma, detto in parole povere e poco rigorose, un qualunque elemento di M (ordinato secondo il tipo ω*), dovrà, seguendo l'algoritmo, "prima o poi" essere associato a qualche elemento di R.*

§§§

Io personalmente trovo più convincente la seguente dimostrazione del teorema.
Siano dati l'insieme R e l'insieme M con le caratteristiche note.
Si scelga r_1 in R e lo si associ a m_1 in M: <u>indico con gli stessi pedici gli elementi associati dei due insiemi</u>.
Si scelga poi m_2 in M, diverso da m_1 e lo si associ a r_2 diverso da r_1 in R, mantenendo l'ordine: ciò è sempre possibile, poiché, non essendoci in R estremi superiori e inferiori, essendo R denso e numerabile, esistono infiniti elementi in R con queste caratteristiche. (*)
Si scelga poi r_3 in R, diverso da r_1 e r_2, e lo si associ a m_3 in M, diverso da m_1 e m_2, mantenendo l'ordine.
Si scelga poi m_4 in M, diverso da m_1, m_2 e m_3, e lo si associ a r_4 in R, diverso da r_1, r_2 e r_3, mantenendo l'ordine.
E così via.
In questo modo, andando avanti e indietro fra i due insiemi (il metodo è detto in inglese "<u>back-and-forth method</u>"), numerabilmente, si può essere certi di creare una funzione iniettiva e suriettiva che mantiene l'ordine degli elementi. Cioè una corrispondenza biunivoca fra i due insiemi che conserva l'ordine. C. v. d.
(*) Questo punto è critico e merita una spiegazione più dettagliata: supponiamo di essere giunti ad associare r_n con m_n. Possiamo essere certi di poter associare un ulteriore punto m_{n+1} di M, diverso da tutti i precedenti m che so-

no già stati associati, mantenendo l'ordine dell'associazione? Solo tre casi possono darsi:

1) nell'ordine di M, m_{n+1} è minore di m_α, il minore di tutti gli m già associati

2) nell'ordine di M, m_{n+1} è maggiore di m_ω, il maggiore di tutti gli m già associati

3) nell'ordine di M, m_{n+1} è compreso fra due elementi già associati e siano m_ν e m_μ.

Nel caso 1), poiché R non possiede estremo inferiore, esistono infiniti (numerabili) elementi di R, minori di r_α; fra questi, scegliamone uno (diverso dai precedenti r già associati, che sono in numero finito), chiamiamolo r_{n+1} e associamolo a m_{n+1}: l'ordine è mantenuto poiché r_{n+1} è minore di tutti gli r già associati.
Nel caso 2), poiché R non possiede estremo superiore, esistono infiniti (numerabili) elementi di R, maggiori di r_ω; fra questi, scegliamone uno (diverso dai precedenti r già associati, che sono in numero finito), chiamiamolo r_{n+1} e associamolo a m_{n+1}: l'ordine è mantenuto poiché r_{n+1} è maggiore di tutti gli r già associati.
Nel caso 3), poiché R è dappertutto denso, esistono infiniti (numerabili) elementi di R, compresi fra r_ν e r_μ; fra questi, scegliamone uno (diverso dai precedenti r già associati, che sono in numero finito), chiamiamolo r_{n+1} e associamolo a m_{n+1}: l'ordine è mantenuto poiché r_{n+1} è compreso fra r_ν e

r_μ, rispettivamente già associati a m_ν e m_μ.

Analogamente si procede per associare nuovi punti di R. *(torna a p. 46)*

(32*) un insieme condensato
Oggi diremmo un insieme "denso". *(torna a p. 55)*

(33*) $x \prec x'$ quando $x < x'$
Qui si osserva in modo evidente il diverso significato dei due simboli "$\prec$" e "$<$": viene usato il primo quando l'insieme <u>ordinato</u> è pensato nel senso più generale possibile, cioè quando i suoi elementi sono di natura qualsivoglia; il secondo invece quando l'insieme è numerico e i suoi elementi vengono considerati nel loro ordine naturale. *(torna a p. 56)*

(34*) $r < r_{\chi_\nu}$ per $\nu \overline{\overline{>}} \nu_0$
Nel testo di riferimento si dice $r > r_{\chi_\nu}$ per $\nu \overline{\overline{>}} \nu_0$, *ma è un errore, come confermato anche dal testo originale tedesco.* *(torna a p. 59)*