Guido Castelnuovo

Spazio e tempo secondo le vedute di A. Einstein

QUESTO E-BOOK:

TITOLO: Spazio e tempo secondo le vedute di A. Einstein
AUTORE: Castelnuovo, Guido
TRADUTTORE:
CURATORE:
NOTE:

COPERTINA: n. d.

TRATTO DA: Spazio e tempo secondo le vedute di A. Einstein / Guido Castelnuovo. - Bologna : Zanichelli, 1983. - XII, 126 p. ; 21cm.

CODICE ISBN FONTE: n. d.

1a EDIZIONE ELETTRONICA DEL: 12 aprile 2023

INDICE DI AFFIDABILITÀ: 1
0: affidabilità bassa

1: affidabilità standard
2: affidabilità buona
3: affidabilità ottima

SOGGETTO:
SCI061000 SCIENZA / Relatività

DIGITALIZZAZIONE:
Paolo Alberti, paoloalberti@iol.it

REVISIONE:
Gabriella Dodero

IMPAGINAZIONE:
Paolo Alberti, paoloalberti@iol.it

PUBBLICAZIONE:
Catia Righi, catia_righi@tin.it
Claudia Pantanetti, liberabibliotecapgt@gmail.com

Liber Liber

Se questo libro ti è piaciuto, aiutaci a realizzarne altri. Fai una donazione: www.liberliber.it/online/aiuta.

Scopri sul sito Internet di Liber Liber ciò che stiamo realizzando: migliaia di ebook gratuiti in edizione integrale, audiolibri, brani musicali con licenza libera, video e tanto altro: www.liberliber.it.

Indice generale

G. CASTELNUOVO

SPAZIO E TEMPO

secondo le vedute di A. Einstein

PREFAZIONE

Pareva, negli anni precedenti la grande guerra, che le preoccupazioni materiali avessero assopito l'attrattiva delle ricerche astratte e che alle applicazioni si volgessero ormai i più fervidi ingegni. Di fronte a costoro, pochi spiriti assetati di alti ideali si ritraevano dalla scienza che non dava risposta ai loro dubbi, per abbandonarsi alle mistiche contemplazioni.

In questa crisi del pensiero scientifico, è sorto il genio di Alberto Einstein il quale, con audacia che ci riempie di ammirazione, ha affrontato i maggiori problemi dell'universo. Le correzioni che egli ha saputo portare alla teoria della gravitazione, l'opera più perfetta della scienza moderna, la previsione, confermata dalle osservazioni, di fenomeni astronomici delicatissimi, bastarono a scuotere l'indifferenza verso gli studi puri. E noi che per gli studi puri viviamo avemmo il conforto di riconoscere che le grandi verità scientifiche, anche le più astratte, esercitano sempre un fascino potente sullo spirito umano.

L'interesse che queste ricerche hanno destato fra i cultori della scienza si è via via diffuso tra i profani, i *quali hanno chiesto di conoscere almeno i principi della nuova dottrina. Innumerevoli libri si son proposti di soddisfare questa sete di sapere; ma la sete è ancora inesausta.*

Tra le opere di volgarizzazione alcune, le più facili, se possono accontentare i frequentatori di un salotto intellettuale, lasciano sussistere, colla loro forma vaga, molteplici dubbi nel lettore riflessivo. Altre riescono astruse per la esposizione soverchiamente astratta. Altre infine, veramente ottime, non bastano agli svariati gradi di cultura, alle svariate forme di intelligenza di tutti coloro che vorrebbero penetrare più addentro nella recente teoria. D'altra parte i trattati ove questa è approfondita sotto l'aspetto matematico sono alla portata di pochi iniziati e coprono talvolta, sotto il velo delle formole, i fatti fisici che maggiormente dovrebbero esser posti in rilievo.

Ho pensato perciò che non fosse superfluo questo libretto ove ho esposto con maggiore ampiezza il soggetto di due conferenze da me tenute alla Associazione Elettrotecnica, Sezione di Roma, e all'Associazione per l'Alta Cultura di Milano. Nel quale opuscolo ho limitato il mio esame ai due punti che a me sembrano più fondamentali nella concezione di Einstein: la nozione di tempo relativo e quella di campo gravitazionale. Ho cercato di illuminare l'argomento sotto l'aspetto fisico e matematico, evitando però gli sviluppi formali che della matematica costituiscono sì lo sviluppo tecnico indispensabile per risolvere i problemi, ma non sempre il *mezzo più adatto per chiarire i concetti.*

Io credo che questo opuscolo sia in gran parte accessibile a chi ricordi i fondamenti della matematica e della fisica che vengono forniti dall'insegnamento secondario; qualche nozione ulteriore di geometria è data in forma piana all'attento lettore. Due o tre punti dell'ultima parte possono richiedere, a dir vero, cognizioni più alte; ma non sono indispensabili per la comprensione del soggetto.

Io spero che alla fine di questo libro il lettore sarà in grado di gustare la bellezza dell'edifizio maestoso elevato da Alberto Einstein. L'edifizio potrà forse esser ritoccato in avvenire, ma resterà sempre una delle creazioni più grandiose dell'ingegno umano.

Roma, ottobre 1922.

PARTE PRIMA
LA RELATIVITÀ DEL TEMPO

I.
Il principio di relatività di Galileo.

Chi della teoria della relatività conosce poco più del nome può dal nome stesso esser condotto a false prevenzioni, diverse però secondo l'indole e l'estensione della propria cultura. Se egli ha scarsa familiarità colla storia delle scienze fisiche, può credere che Einstein abbia per primo fugato il fantasma della quiete assoluta e del moto assoluto che dominava la filosofia aristotelica. Se, al contrario, egli ricorda i principi della meccanica appresi nelle scuole secondarie, ben sa che la vittoria contro il fantasma è vanto del Rinascimento; ed allora egli può chiedere in che consista il merito di Einstein, atteso che la meccanica di Galileo e Newton era già in sostanza (se pur non sempre nella forma) ispirata al concetto della relatività del moto.

Per giudicare equamente il progresso compiuto dalla filosofia naturale nell'ultimo ventennio è necessario avere una chiara idea del punto di partenza.

Lasciamo la parola al nostro sommo fisico pisano il quale, colla lucidità consueta, così espone il suo pensiero, per bocca di Salviati, nel celebre dialogo: *I due massimi sistemi del mondo.*

«Riserratevi con qualche amico nella maggior stanza che sia sotto coperta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vada versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca che sia posto a basso; e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che questa, quando le lontananze sieno eguali, e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazi passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, perchè niun dubbio vi sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder così, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; chè (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, nè da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma; voi saltando passerete nel tavolato i medesimi spazi che prima, nè, perchè la nave si muova velocissimamente, farete maggior salti verso la poppa che verso la prua, benchè, nel tempo che voi state in aria, il tavolato sottopostovi scorra verso la parte contraria al vostro salto; e gettando alcuna cosa al compagno, non con più forza bisognerà tirarla per arrivarlo, se egli sarà verso la prua e voi verso la poppa, che se voi fuste situati per l'opposito; le gocciole cadranno come prima nel vaso inferiore, senza caderne pur una verso poppa, benchè, mentre la gocciola è per aria, la nave scorra molti palmi; i pesci nella lor acqua non con più fatica noteranno verso la precedente che verso la susseguente parte del vaso, ma con pari agevolezza verranno al cibo posto su qualsivoglia luogo dell'orlo del vaso; e finalmente le farfalle e le mosche continueranno i lor voli indifferentemente verso tutte le parti, nè mai accadrà che si riduchino verso la parte che riguarda la poppa, quasi che fussero stracche in tener dietro al veloce corso della nave, dalla quale per lungo tempo, trattenendosi per aria, saranno state separate;....».

In breve, ogni fenomeno, ogni esperienza che abbia luogo nell'interno della nave si manifesta nell'identico modo, tanto se la nave è in quiete, quanto se è in moto uniforme rispetto all'acqua tranquilla.

L'estensione del risultato ad altri sistemi mobili (treni, corpi celesti,...) è immediata e conduce al seguente enunciato che riassume il *principio di relatività* della meccanica classica

A) Nessuna esperienza eseguita nell'interno di un sistema permette di distinguere se il sistema sia in quiete o in moto rettilineo uniforme.

In altre parole, i due stati sono perfettamente equivalenti sotto l'aspetto fisico; chiamare *quiete* l'uno e *moto* l'altro è solo frutto di una convenzione.

Si badi però che nella forma primitiva di quell'enunciato le esperienze di cui si parla riguardano soltanto *fenomeni meccanici*. Solo in epoca molto più recente il principio fu esteso a tutti i fenomeni fisici.

La forma sotto cui abbiamo presentato il principio *A)* può, a prima vista, parere assai chiara. Un esame più accurato fa sentire l'opportunità di una maggiore precisione.

Ricordiamo la legge di inerzia secondo la quale un corpo non soggetto a forze persevera nel suo stato di quiete o moto rettilineo uniforme. Una palla lanciata sopra un piano orizzontale di ghiaccio levigato continuerebbe all'infinito a muoversi in linea retta con velocità costante, se potessimo sopprimere l'attrito e la resistenza dell'aria. Se però la piattaforma di ghiaccio ruotasse intorno ad un asse verticale mentre la palla corre, la linea tracciata da questa sulla piattaforma non sarebbe più una retta.

Esistono adunque sistemi (ad es. la piattaforma fissa) rispetto ai quali la legge di inerzia si verifica nei termini sopra enunciati, e sistemi (piattaforma ruotante) sui quali non è più vera. Noi chiameremo *galileiani* i primi sistemi. La Terra od un sistema ad essa legato (ad es. una stanza, un edifizio...) è in prima approssimazione, ove si astragga dal moto di rotazione diurno, un sistema galileiano. Ed è pur tale ogni sistema che si muova di moto rettilineo uniforme rispetto alla Terra, ad es. la nave di cui parla Galileo, un treno, ecc.

Possiamo ora, con maggior precisione, enunciare il principio di relatività *A*) sotto la forma

A') I sistemi galileiani sono tutti equivalenti rispetto alle leggi della meccanica. Nessuna esperienza permette di distinguere un particolare sistema galileiano tra gli infiniti sistemi consimili; in altre parole, non v'è un sistema galileiano privilegiato che dia una forma particolarmente semplice alle leggi della meccanica.

È possibile invece distinguere con esperienze un sistema *non galileiano* da un sistema *galileiano*. Così, mediante apparecchi opportuni, ad es. col pendolo di Foucault, si può mettere in evidenza la rotazione diurna della Terra, e dimostrare che un corpo fissato su questa non costituisce, a stretto rigore, un sistema galileiano. Tale sarebbe invece, in un ordine molto superiore di approssimazione, una terna di assi uscenti dal centro del Sole e diretti a tre stelle lontane.

La traduzione in formule di alcune delle osservazioni precedenti è, o sembra, immediata. Supponiamo che un treno corra con velocità costante v lungo un binario rettilineo, e che un punto, che dirò *coda* del treno, passi nell'istante 0 davanti ad un punto del binario, *origine*, a partire dal quale vengono valutate le distanze su questo. Dopo t secondi la coda del treno si troverà alla distanza vt dall'origine. Un punto del treno che disti x' dalla coda avrà in quel momento la distanza $x = x' + vt$ dall'origine del binario. D'altra parte la distanza trasversale y' del punto dall'asse del treno uguaglia la distanza trasversale *y* del punto stesso dall'asse del binario, se i due assi coincidono; e altrettanto si ripete per le distanze verticali *z', z*. Le formule scritte così:

(1) $x = x' + vt', y = y', z = z', t = t'$

costituiscono una *trasformazione di Galileo*. Esse permettono di riferire al sistema treno (*x', y', z', t'*) un punto o meglio un evento che abbia luogo nella posizione *x, y, z* e nell'istante *t* rispetto al sistema binario. Se noi conosciamo la legge matematica di un fenomeno meccanico rispetto al binario, possiamo col mezzo delle (1) trovare la legge dello stesso fenomeno riferito al treno. D'altra parte le due leggi non possono differire, in virtù del principio di relatività presentato sotto la forma *A'*. Siamo perciò indotti ad affermare, almeno in via provvisoria:

α) *Le equazioni che esprimono le leggi della meccanica rispetto ad un sistema galileiano non devono alterarsi se, in luogo delle variabili x, y, z, t, si sostituiscono i secondi membri delle* (1).

È però necessario avvertire che nello stabilire le formule di trasformazione (1) si è introdotta inconsciamente una ipotesi insidiosa che riguarda la misura del tempo e che per il momento diremo *ipotesi del tempo assoluto*, riserbandoci di spiegarne tra poco il significato. La ipotesi interviene nel passaggio dall'enunciato *A'*) all'affermazione α). Quest'ultima non è dunque equivalente al principio di relatività *A'*). Perchè fosse giusta l'affermazione α) sarebbe necessario che, insieme all'*A'*), risultasse verificata anche l'ipotesi del tempo assoluto.

A richiamar l'attenzione sulla detta ipotesi non è bastato lo studio dei fenomeni meccanici, giacchè per questi, nell'ordine di precisione concesso dai nostri strumenti di misura, l'affermazione α) sussiste. Non così per la elettrodinamica.

Quest' ultima teoria fu riassunta dal Maxwell in alcune equazioni differenziali, le cui conseguenze si son sempre dimostrate conformi ai fatti. Ora quelle equazioni, valide per un particolare sistema galileiano di riferimento, *sistema in quiete rispetto all'etere*, si alterano ed assumono una forma più complicata se si muta il sistema di riferimento mediante le (1). Insomma per le equazioni della elettrodinamica non sussiste l'affermazione α).

Ma per i fenomeni studiati da questa scienza sarà ancora vero il principio di relatività sotto la forma *A*) od *A'*)? Se il principio non sussistesse, noi dovremmo riuscire, con esperienze ottiche, elettriche o magnetiche, a distinguere un sistema in quiete rispetto all'etere da un sistema in moto, e quindi a rivelare ad es. il moto annuo della Terra intorno al Sole. Se al contrario non è possibile, nemmeno colle nuove esperienze, discriminare la quiete dal moto, se dunque, anche per i fenomeni ottici ed elettromagnetici, sussiste il principio di relatività *A*) od *A'*), mentre per essi non si verifica certo l'affermazione α), vuol dire che l'ipotesi del tempo assoluto introdotta per passare da *A'*) ad α) deve esser respinta.

Nelle considerazioni ora esposte è rapidamente riassunto il processo che ha condotto, sulla fine del secolo scorso, alcuni matematici e fisici insigni, tra i quali primeggia il Lorentz, a rivedere le basi su cui poggia la trasformazione di Galileo (1) che era sino allora accolta senza discussione.

Noi non avremo bisogno di ricorrere alle equazioni di Maxwell. L'esame del più semplice fenomeno della elettrodinamica, la propagazione della luce nel vuoto, considerata sotto il solo aspetto cinematico, sarà sufficiente per indurci ad abbandonare, con Einstein, la ipotesi del tempo assoluto e le formule (1) che ne seguono. Vedremo per questa via che la ipotesi di un tempo unico, il quale regoli l'andamento di tutti i fenomeni dell'universo, non ha un senso positivo. L'orologio del viaggiatore sul treno dell'esempio di pocanzi e l'orologio del cantoniere fisso sulla linea non vanno esattamente d'accordo, mentre questo accordo fu tacitamente presupposto nello scrivere le formule.

II.
L'accordo degli orologi.

Se si vuol paragonare lo svolgersi di due fenomeni che abbiano luogo in posti diversi e in diverse condizioni, è necessario avere un criterio per confrontare intervalli di tempo. Occorre intanto collocare nei posti nominati due orologi le cui indicazioni siano comparabili, e sui quali abbiano influenza trascurabile le condizioni fisiche in cui i fenomeni si verificano. Un processo *periodico*, il quale adunque si ripeta costantemente colle stesse particolarità, può fornire un *orologio naturale*; il periodo darà l'unità di tempo. Si potrà scegliere ad es. un *diapason* vibrante nel vuoto, la pulsazione di una determinata radiazione dello spettro, ecc.

Adottati due orologi naturali identici, rimane ancora da metterli d'accordo se essi si trovano a tale distanza da non poter essere confrontati direttamente. Il problema si risolverebbe subito se noi potessimo trasmettere segnali con velocità infinita. Sarebbe questo il caso degli orologi collegati elettricamente in una stessa città, se la corrente elettrica non impiegasse per passare dall'uno all'altro un tempo che, per quanto piccolo, va considerato dal punto di vista teorico. All'epoca di Galileo si credeva che la luce si propagasse istantaneamente; per questa ragione il problema dell'accordo degli orologi non si sarebbe allora presentato. Ma dal giorno in cui Roemer (1676) dimostrò la falsità di quella ipotesi, mentre la scienza richiedeva anche nella misura del tempo una precisione sempre maggiore, la questione doveva sorgere. È grande merito di Einstein di avere, fin dal 1905, vista l'importanza di un problema in apparenza così semplice e di aver tratto, con mezzi elementari, dalla discussione di esso conseguenze fondamentali per la scienza.

Due viaggiatori *A* e *B* situati alle due estremità di un treno tubulare chiuso, che corre con velocità costante sul binario rettilineo, vogliono accordare i loro orologi.

1) Il mezzo che ad essi si presenta più naturale consiste nel portarli nel punto medio *C* del treno, metterli qui d'accordo, e riportarli in *A* e *B*. Supposti i due orologi identici, ed eseguito il ritorno alle posizioni iniziali con movimenti perfettamente simmetrici rispetto a *C*, per conservare i due orologi nelle stesse condizioni, si può ritenere di aver raggiunto lo scopo. I due viaggiatori vogliono però assicurarsi con altre esperienze se l'accordo è ottenuto e si conserva.

2) Essi ricorrono anzitutto a procedimenti meccanici. Costruito nel punto medio *C* un bersaglio, essi lanciano da *A* e *B*, quando i due orologi segnano lo stesso istante, un proiettile contro il bersaglio, con armi identiche, adoperate nell'identico modo. I due proiettili arriveranno insieme al bersaglio *C*? L'esperienza eseguita quando il treno era fermo ha dato risultato positivo. Se l'esito fosse diverso sul treno in moto, i due viaggiatori avrebbero il modo di accorgersi, con esperienze interne, che il treno corre. Ma ciò contraddice il principio di relatività *A*) che noi accettiamo senza restrizione per i fenomeni meccanici, giacchè per questi esso ha ricevuto sinora innumerevoli conferme. La esperienza deve dunque riuscire e fornisce anzi un secondo mezzo per accordare i due orologi in *A* e *B*, quando il primo mezzo non si fosse voluto o potuto adottare.

3) I due viaggiatori vogliono eseguire un'analoga

esperienza con trasmissioni sonore, e verificare se segnali acustici emessi contemporaneamente da *A* e *B* siano percepiti nello stesso istante da un viaggiatore situato nel punto medio del treno *C*. Qui bisogna distinguere due casi. Se la trasmissione avviene nell'interno del treno che, essendo chiuso, trasporta la propria atmosfera e quindi le onde sonore, il fenomeno si verifica nel modo previsto dai viaggiatori, perchè è sempre applicabile il principio *A*). Ma se la trasmissione ha luogo nell'aria esterna, che si suppone in quiete rispetto al terreno, mentre il treno si muove, il fenomeno si presenta diversamente. Le onde sonore partono da *A* e *B* come se questi punti fossero *fissi* sul binario e l'incontro avviene nel punto medio *tra le posizioni che avevano A e B quando i suoni furono emessi*, mentre il punto medio del treno, quando lo raggiunge il suono partito da *A*, si è già avanzato di qualche metro sul binario. Dunque in questa seconda esperienza sonora i due segnali vengono percepiti contemporaneamente, non già da un viaggiatore situato nel punto medio del treno, bensì da un viaggiatore più vicino alla coda che alla macchina. Se la posizione di costui è nota, si riesce facilmente a valutare la velocità del treno. A prima vista il risultato può sembrare in contrasto col principio *A*). In realtà ciò non è perchè nell'esperienza intervengono *due* sistemi: l'atmosfera in quiete e il treno in moto. Non v'è dunque nulla di strano che si possa misurare la velocità relativa dell'uno rispetto all'altro.

4) Un'ultima esperienza vogliono eseguire i viag-

giatori con segnali luminosi, e cercano di prevedere l'esito. Essi presumono anzitutto che non vi sarà differenza fra la trasmissione luminosa all'interno o all'esterno del treno. Nessun fatto fisico ha lasciato sospettare sinora che un recinto chiuso in moto possa trasportare con sè l'etere ivi contenuto, mentre tutto induce a credere che le pareti del recipiente siano interamente permeabili all'etere. Resta però a vedere se il fenomeno si presenterà come nella prima o nella seconda esperienza sonora. Due segnali luminosi, emessi da *A* e *B* quando gli orologi, già accordati, segnano la stessa ora, saranno percepiti contemporaneamente dal viaggiatore *C* situato nel punto medio del treno? Se il contrario avvenisse si avrebbe il mezzo di determinare la velocità del treno rispetto all'etere che trasporta le onde luminose. E poichè l'esperienza, almeno concettualmente, potrebbe ripetersi in ogni regione dello spazio, anche se non esiste materia, si avrebbe il mezzo di caratterizzare dovunque uno stato privilegiato di quiete, che potremmo chiamare *assoluta*: la quiete rispetto all'etere. Questa previsione, che fu ammessa anche da fisici illustri, non ha in sè nulla di assurdo, e non può dirsi in contrasto col principio *A*), purchè il detto principio venga limitato ai soli fenomeni meccanici. La previsione urta tuttavia contro le nostre vedute filosofiche, mal disposte ad accettare, sia pure sotto una forma più blanda, la nozione di quiete assoluta.

Comunque sia, solo l'esperienza è atta a decidere tra le due soluzioni. Una esperienza mirabile per ingegnosità e accuratezza fu eseguita da Michelson nel 1881 e ripetuta più volte in seguito, coll’aiuto di collaboratori e con sempre maggior precisione. Fungeva da treno la Terra col suo moto di traslazione annua. Un raggio luminoso, emesso da una sorgente terrestre, era costretto a percorrere sia un cammino di andata e ritorno, nel senso in cui la Terra si muove (nella presunta corrente di etere, e contro corrente), sia un cammino uguale in direzione perpendicolare. I due tempi di percorso, paragonati con ogni scrupolo tra loro, sono risultati rigorosamente uguali, mentre la sensibilità delle misure avrebbe riscontrato anche una differenza uguale ad un decimo di quella che si attendeva. L’esperienza di Michelson non ha dunque permesso di rivelare il moto della Terra attraverso l’etere, nemmeno con esperienze ottiche. Il principio di relatività *A*) è stato confermato in tutta la sua generalità, non solo rispetto alle esperienze meccaniche (come già Galileo e Newton ammettevano), ma pure di fronte ai fenomeni ottici ed elettromagnetici. In questa estensione del detto principio o, se si preferisce, nell’affermazione che *esperienze interne eseguite sopra un sistema in moto rettilineo uniforme non possono nemmeno rivelare il moto del sistema rispetto all’etere*, sta un primo progresso della nuova teoria della relatività di fronte alla meccanica classica[1].

---

1 La interpretazione dell’esperienza di Michelson diede luogo a qualche critica degna di rilievo. Alla critica fu risposto, ma la discussione non può ancora dirsi esaurita. Sta il fatto però che altre esperienze ottiche od elettriche, che furono proposte ed eseguite in sostituzione di quella, hanno dato risultati conformi. *Nes-*

Ritornando al nostro treno noi abbiamo acquisito un modo teoricamente più perfetto degli altri per regolare gli orologi dei due viaggiatori *A* e *B*. *Gli orologi vanno d'accordo se due segnali luminosi emessi da A e B quando gli orologi segnano lo stesso istante vengono percepiti insieme da un osservatore C situato ad ugual distanza da A e B ed in quiete rispetto ad essi* (cioè trasportato dal sistema a cui *A* e *B* appartengono).

III.
Il principio della costanza della velocità della luce.

Il confronto della nostra esperienza ottica 4) coll'esperienza balistica 2) conduce a formulare una questione che è essenziale per lo sviluppo della teoria.

Supponiamo che il proiettile lanciato dal viaggiatore di coda *A* lungo il treno abbia, rispetto a questo, la velocità u, e che il treno corra colla velocità v. Per un cantoniere fermo sul binario il proiettile apparirà muoversi colla velocità $u + v$. Questa legge di addizione delle velocità, accolta dalla meccanica classica, fu sempre verificata con tutta la precisione desiderabile per le velocità che possono ordinariamente raggiungersi. Dobbiamo

suna esperienza permette oggi di misurare la velocità di un corpo rispetto all'etere.

ora domandarci: la legge si estende anche alle propagazioni luminose? In termini precisi: per un osservatore fermo la velocità della luce si somma colla velocità della sorgente? La formula cinematica ora ricordata ci indurrebbe a dare una risposta affermativa. Ma d'altra parte la teoria ondulatoria della trasmissione luminosa conduce a ritenere che la luce si propaghi nel vuoto con una velocità costante rispetto all'etere, qualunque sia il moto della sorgente; il fatto analogo si verifica per le trasmissioni sonore nell'atmosfera tranquilla.

Anche qui, fra queste due tesi contradditorie, solo l'esperienza e l'osservazione possono decidere. Non già l'esperienza di Michelson eseguita con una sorgente *terrestre*, giacchè il risultato a cui essa ha condotto è compatibile coll'una e coll'altra delle due ipotesi.

Un primo mezzo per risolvere il dilemma è fornito dalle osservazioni delle stelle doppie. Gli astronomi conoscono numerosi sistemi composti di due stelle, di cui la più piccola (*compagno*) ruota intorno alla maggiore (*astro principale*) con una certa velocità v. Se il piano dell'orbita passa presso a poco per la Terra, il diametro perpendicolare al raggio visuale incontra l'orbita in due punti P, R, in uno dei quali, sia P, il *compagno* si allontana dalla Terra colla velocità v, mentre in R si avvicina colla stessa velocità. Accolta la ipotesi della addizione delle velocità, e detta c la velocità della luce emessa dall'astro principale, un raggio luminoso proveniente dalle posizioni P ed R del *compagno* viaggerebbe colla velocità $c - v$ e $c + v$ ed impiegherebbe quindi i tempi

$\dfrac{d}{c-v}$ e $\dfrac{d}{c+v}$ a pervenire alla Terra, se d è la distanza tra questa e l'astro principale. Per una stella doppia il cui periodo[2] sia di qualche giorno e la cui luce impieghi qualche decina d'anni a raggiungerci, si presenterebbe un fenomeno come questo: la luce proveniente dal compagno mentre descrive la metà più lontana *PQR* dell'orbita sarebbe percepita da noi durante un intervallo brevissimo, ad es. di un'ora, e quindi apparirebbe notevolmente rinforzata, mentre in un intervallo molto più lungo (differenza tra l'intero periodo e un'ora) riceveremmo la luce, fortemente indebolita, proveniente dalla semiorbita più vicina *RSP*. Si verificherebbe insomma un fenomeno analogo a quello dei fari a lampi, ove un lungo intervallo di oscurità separa due lampi successivi. Ora fenomeni di questo tipo non si presentano, o per lo meno non si accordano coi dati sul movimento del *compagno* forniti dall'analisi spettroscopica.

Da un esame accurato delle osservazioni l'astronomo De Sitter ha potuto dunque concludere che la velocità della luce non si somma colla velocità della stella che la emette.

Alla stessa conclusione pervennero il fisico Tolman mediante un confronto tra gli spettri della luce proveniente da sorgenti terrestri o celesti, e il nostro Majorana con esperienze dirette in cui intervenivano sorgenti lu-

2 Tempo impiegato dal *compagno* a ruotare intorno all'astro principale.

minose terrestri (specchi) in rapido moto.

L'accordo di queste varie indagini ci autorizza ad enunciare il secondo principio della teoria che andiamo esponendo, o *principio della costanza della velocità della luce:*

B) *La luce si propaga nel vuoto con una velocità che non dipende nè dal moto della sorgente, nè dal moto dell'osservatore.*

Vuol dire che se un raggio luminoso segue il binario su cui si trova il nostro treno *AB*, la luce impiega, per i viaggiatori, lo stesso tempo a passare da *A* in *B*, sia che il treno stia fermo o percorra il binario nell'uno o nell'altro verso, sia che il punto da cui parte la luce faccia parte del treno o sia fisso sul binario o si muova su questo con velocità qualsiasi[3].

Ne viene che per velocità uguali o comparabili con quelle della luce non vale più la legge di addizione, o di composizione delle velocità che la meccanica classica ammetteva senza restrizioni. Insomma accettare il principio *B*) vuol dire mutare una delle basi della meccanica newtoniana e quindi introdurre in questa scienza modificazioni essenziali.

---

3 Si osservi che in base al principio di relatività *A*), comunque si svolga il fenomeno di cui stiamo parlando, è sempre lecito supporre il treno in quiete e la sorgente luminosa in moto.

IV.
Il carattere relativo della simultaneità.

Ammessi i principi *A*) e *B*) dobbiamo accoglierne le conseguenze, per quanto strane possano apparire. Queste conseguenze costituiscono la teoria della *relatività ristretta*, che Einstein ha costruito tra il 1905 e il 1907. I primi risultati della teoria si ottengono mediante considerazioni elementari.

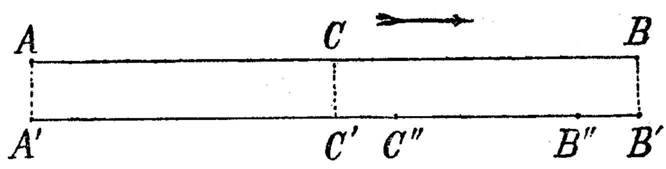

Fig. 1.

Supponiamo ancora una volta che i due viaggiatori *A* e *B*, situati agli estremi del nostro treno in corsa, abbiano accordato i loro orologi mediante segnali ottici (pag. 16). Quando questi orologi segnano uno stesso istante, ad es. 0, i viaggiatori passano davanti a due cantonieri *A'* e *B'* fissi sul binario (fig. 1). I cantonieri hanno pure, per conto loro, accordato i loro orologi col procedimento ottico sopra ricordato. I viaggiatori *A* e *B* lanciano due segnali luminosi quando i *propri* orologi segnano 0. I segnali sono percepiti insieme da un viaggiatore *C* situato nel punto medio del treno, o, più esattamente, nella posizione che occupa quel punto medio quando esso è raggiunto dalla luce proveniente da *A* e *B*. Se il treno fosse fermo, questa posizione coinciderebbe col punto medio *C*, di *A'B'*. Ma poichè il treno si è mosso durante la propagazione luminosa, il punto di incontro sarà *C″* più vicino a *B'* che ad *A'*.

D'altra parte, visto che la luce si propaga colla stessa velocità rispetto al treno e rispetto al binario, il fenomeno si svolge come se i due segnali fossero partiti da *A'* e *B'*. I due cantonieri s'accorgono che i due segnali si incontrano in un punto *C″* più vicino a *B'* che ad *A'*, e concludono che i segnali non sono partiti contemporaneamente da *A'* e *B'*, giacchè, se fossero stati contemporanei, l'incrocio sarebbe avvenuto in *C'*, equidistante da *A'* e *B'*. Il cantoniere *B'* afferma dunque che il proprio segnale (o quello di *B*) fu fatto più tardi che il segnale emesso da *A'* (o da *A*). Ad es. se l'orologio di *A'* dava il tempo 0, come l'orologio di *A*, quando il lampo di luce fu lanciato dalla coda del treno, l'orologio di *B'* doveva indicare un tempo maggiore, diciamo 1, quando il lampo fu emesso dal viaggiatore *B*. Eppure gli orologi *A* e *B* segnavano entrambi 0. Dobbiamo dunque concludere che gli orologi dei cantonieri, *accordati lungo la linea*, danno indicazioni diverse da quelle degli orologi dei viaggiatori *accordati sul treno*. In breve: *eventi contemporanei per i viaggiatori non sono più tali per le persone situate lungo la linea*; e viceversa.

Prima di commentare questo fondamentale risultato conviene trarre dall'esempio del treno un'altra conseguenza.

I viaggiatori e i cantonieri vogliono misurare la lunghezza del treno. I primi, trasportando un metro lungo il treno, trovano un certo numero che misura il segmento *AB=A'B'*. Ma i cantonieri non possono assumere *A'B'* come lunghezza del treno, giacchè *A'* è la posizione della coda *quando l'orologio del primo cantoniere segnava* 0, mentre *B'* è la posizione della macchina *quando l'orologio del secondo cantoniere segnava* 1. Occorre dunque stabilire qual posizione *B"* (fig. 1) occupasse sul binario la macchina, quando un orologio situato ivi sul binario ed accordato cogli orologi *A'* e *B'* segnava 0. È allora *A'B"* la lunghezza del treno per i cantonieri e risulta più corta di *A'B' = AB*[4]. *La lunghezza di un treno in moto appare più corta ai cantonieri, i quali la valutano stando sul binario, che ai viaggiatori i quali eseguiscono la misura stando sul treno*. Gli oggetti in moto subiscono rispetto ad un osservatore fisso una contrazione tanto più sensibile quanto maggiore è la velocità.

4 È chiaro che la distanza fra la posizione occupata dalla coda di un treno a un certo istante e la posizione della macchina un secondo più tardi supera la lunghezza del treno di 30^{m} se il treno corre colla velocità di 30^{m} al secondo. Si badi però che in relazione a questa velocità, l'unità di tempo adoperata nel testo è immensamente più piccola di 1^{s}. Se il treno è lungo un chilometro per i viaggiatori, la differenza dei tempi segnati dagli orologi *B* e *B'* risulta (in base a formule che saranno poi stabilite) eguale ad $\frac{1s}{3 \cdot 10^{12}}$ ed il treno apparisce ai cantonieri scorciato di $\frac{1s}{2 \cdot 10^{8}}$ millimetri. Si comprende come differenze di quest'ordine siano sfuggite ai più delicati strumenti di misura.

Dei due fatti messi in luce in questo paragrafo appare forse più singolare il primo, che sovverte il concetto assoluto di simultaneità il quale era radicato nel nostro spirito da una tradizione millenaria. Se vogliamo giudicare rettamente la immensa importanza della nuova veduta e collocarla al posto che le spetta nella storia della scienza, dobbiamo riflettere all'analogia che ora si presenta tra le concezioni spaziali e temporali. Prima di discorrere di eventi che si verificano in luoghi diversi nello stesso istante, vogliamo riflettere sulla nozione più familiare di eventi che hanno luogo nello stesso posto in tempi diversi.

Quando i due principali interlocutori del dialogo di Galileo già citato, Salviati e Simplicio, si accordano di trovarsi domani *nella stessa stanza* del palazzo Sagredo, essi attribuiscono a questa frase lo stesso significato pratico; ma il senso teorico è diverso per l'uno e per l'altro. Per Simplicio, aristotelico, la stanza occupa oggi, domani e sempre lo stesso posto nello spazio assoluto; in questo spazio, materializzato, v'è un punto fisso che starà nel centro della stanza, finchè la stanza esisterà. Al contrario Salviati, copernicano, sa bene che il posto è lo stesso per un abitante della Terra, ma un osservatore situato sul Sole misurerebbe tra la posizione di oggi e quella di domani una rilevantissima distanza (qualche milione di chilometri), che rappresenta il tragitto compiuto in 24 ore dalla Terra nel suo moto annuo. E se Salviati avesse saputo che il Sole si muove tra le stelle e queste sono in moto l'una rispetto all'altra, avrebbe concluso che la distanza tra i due luoghi può essere maggiore o minore secondo l’astro da cui la misura vien fatta. Insomma la distanza tra i punti in cui si verificano due eventi non simultanei non ha un valore assoluto, ma dipende dall’osservatore che la misura. Questa nozione è penetrata faticosamente nel nostro spirito; sono occorsi parecchi secoli perchè venisse accolta; e non è ancora larghissimo il pubblico che ha una veduta chiara intorno ad essa.

Oggi ci troviamo, di fronte alle conclusioni di Einstein concernenti gli intervalli di tempo, in una condizione analoga a quella in cui discutevano i personaggi dei «Massimi sistemi». Una affermazione come questa: *un terremoto è stato segnalato a Roma e a Tokyo nello stesso istante* (tenuto conto, s’intende, della differenza di longitudine) aveva prima di Einstein un senso assoluto. I due fenomeni, contemporanei per noi, dovevano esser tali per qualunque osservatore sperduto nello spazio; un unico orologio batteva il *tempo assoluto* a tutto l’universo, e i due fatti occupavano uno stesso posto nella scala temporale. Dopo Einstein quell’affermazione va intesa in senso diverso. Le penne dei due sismografi cominciano ad agitarsi nello stesso istante per un osservatore terrestre; ma uno spettatore che da Marte, o da Sirio,... potesse vedere i due apparecchi, si accorgerebbe che una delle penne si muove prima dell’altra, pur tenendo conto del diverso tempo che la luce impiega per arrivare al suo occhio da Roma o da Tokyo. Certo la differenza dei tempi è molto piccola, inferiore al tempo che la luce impiegherebbe per andare in linea retta e nel vuoto da Roma a Tokyo (inferiore dunque a un trentesimo di secondo); non per questo l'osservazione ha minore interesse. Oggi insomma un intervallo di tempo fra due eventi ha un valore relativo, come la distanza tra i luoghi in cui si verificano; intervallo e distanza dipendono dai moti relativi di quei luoghi e dell'osservatore.

E qui si badi che l'analogia tra intervalli di tempo e di spazio risulta anche più stretta se si tien conto delle alterazioni che distanze e tempi subiscono per effetto del moto del sistema dal quale vengono apprezzati. Ma per veder ciò nettamente occorre tradurre in forma quantitativa le considerazioni qualitative contenute in questo paragrafo.

Prima di abbandonare la trattazione elementare a cui sinora ci siamo attenuti, non sarà male rivedere ancora una volta quali siano i fatti sperimentali che costringono, od almeno consigliano di modificare le teorie dell'antica meccanica.

Due vie sembrerebbero a prima vista particolarmente indicate per conciliare i risultati di questa colle particolarità cinematiche della propagazione della luce.

Una prima via, conforme alla scienza classica, porta a ritenere la velocità della luce costante rispetto ad un mezzo privilegiato, l'etere. Se si accoglie questa soluzione, si viene ad accettare il principio *A*) per i soli fenomeni meccanici, non per gli ottici ed elettromagnetici; il principio *B*) sussiste per quanto riguarda il moto della sorgente, che effettivamente non influirebbe sulla velocità della luce emessa, ma non per quanto riguarda il moto dell'osservatore, la cui velocità si comporrebbe vettorialmente colla velocità della luce. Orbene contro questa soluzione sta l'esperienza di Michelson e le affini le quali provano che il principio *A*) sussiste anche per i fenomeni ottici, e quindi, del principio *B*), non può verificarsi una parte senza che si verifichi anche l'altra.

Una seconda soluzione, la quale fa astrazione dall'etere, porta ad estendere integralmente alle propagazioni luminose la legge di composizione delle velocità di Galileo (addizione di velocità ugualmente dirette). Questa soluzione è d'accordo col principio *A*) accolto nella sua massima estensione, ma è in contrasto col principio *B*) sia nell'una, sia nell'altra delle due parti di cui esso si compone. A questa seconda soluzione si oppongono dunque le osservazioni di De Sitter sulle stelle doppie, le considerazioni di Tolman, i risultati sperimentali di Majorana.

Non può escludersi in modo assoluto che esistano, all'infuori di queste due, altre soluzioni conciliative. Ma finora non furono proposte, e, se pur vi fossero, tutto lascia prevedere che sarebbero estremamente complicate.

Al contrario la teoria costruita da Einstein è attraente per la sua semplicità. Essa conduce, è vero, ad una meccanica diversa dall'ordinaria la quale ha pur avuto tante conferme; ma la discrepanza tra l'antica e la nuova meccanica è insensibile per le velocità a cui quella fu sinora applicata. Per velocità più elevate è la nuova meccanica che spiega fatti i quali difficilmente trovavano posto nella meccanica antica. E la nuova si presta a vedute sintetiche che non apparivano nella scienza classica.

V.
La trasformazione di Lorentz.

Per procedere è necessario procurarci le relazioni che legano spazi e tempi in due sistemi galileiani, in moto relativo. Basta a tal fine riprendere l'esempio che ci ha condotto alle formule di Galileo (1), tenendo però conto del nuovo modo introdotto per accordare gli orologi.

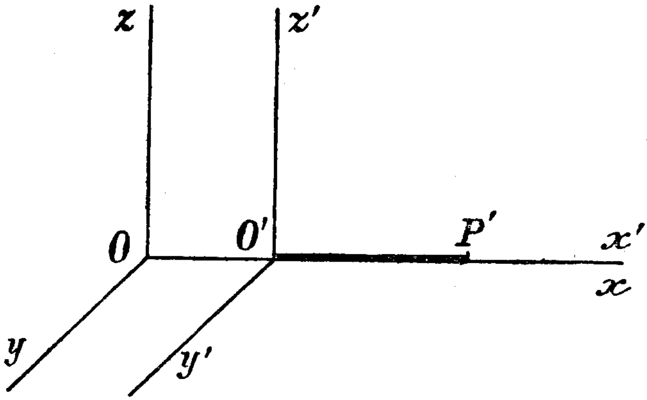

Fig. 2.

Un treno *O'P'* corre colla velocità costante *v* sopra un binario rettilineo *Ox* (fig. 2). Il punto *O'* passa per il punto fisso O del binario nell'istante in cui l'orologio di O', regolato sul treno, e l'orologio di O, regolato sul binario, segnano 0. Un evento si verifica in un punto P' del treno quando l'orologio di P', regolato sul treno, segna t'; ed il punto P' dista, sul treno, di x' metri da O'. Conoscendo questi dati (x', t') e la velocità v del treno, si domandano le caratteristiche spaziali e temporali dell'evento, quale apparisce ad un cantoniere fisso lungo la linea; a quale distanza x da O, misurata sul binario, ha luogo l'evento? qual tempo t segna in quell'istante l'orologio del cantoniere regolato colla stazione O? Si tratta insomma di stabilire le relazioni che passano tra (x, t), (x', t') e v. Accenniamo rapidamente al ragionamento che conduce a queste formule[5]; commenteremo poi il risultato.

Si osserva in primo luogo che la trasformazione fra x, t ed x', t' deve convertire ogni movimento uniforme rispetto al binario in un movimento uniforme rispetto al treno, e viceversa, quindi ogni equazione lineare contenente le variabili x', t' in una equazione lineare nelle variabili x, t. Di qua segue che le formule di trasformazione sono lineari. Esse mancheranno però dei termini noti perchè il punto $x = 0$ nell'istante $t = 0$ (cioè O) deve coincidere per ipotesi col punto $x' = 0$, nell'istante $t' = 0$ (posizione di O' in quel momento). Le formule richieste saranno dunque del tipo

5 Cfr. l'opuscolo di A. Einstein, pubblicato in questa collezione, «Sulla teoria speciale e generale della relatività», trad. dall'ing. Calisse; Appendice.

$$(a) \quad x' = \alpha x + \beta t \quad , \quad t' = \gamma x + \delta t$$

dove α, β, γ, δ sono quattro costanti che dobbiamo ancora determinare.

Si osserva in secondo luogo che una propagazione luminosa con velocità ± *c* rispetto al treno, è pure, per il principio *B*), una propagazione colla stessa velocità ± *c* rispetto al binario. Ora se l'onda luminosa si muove lungo il treno colla velocità *c*, lo spazio *x'* percorso ed il tempo *t'* impiegato a percorrerlo sono legati evidentemente dalla relazione $x'-ct'=0$; ed analoghe relazioni valgono per la propagazione che procede in senso opposto e per le propagazioni lungo il binario. Dunque le formule che andiamo cercando devono trasformare le equazioni $x'-ct'=0$, $x'+ct'=0$, nelle equazioni $x-ct=0$, $x+ct=0$ rispettivamente. Eseguendo effettivamente le sostituzioni (*a*) sulle prime due equazioni e tenendo conto di quanto si è detto, si trovano fra le quattro costanti α, β, γ, δ le due relazioni: $\alpha=\delta$, $\beta=c^2\gamma$,. Con ciò le (*a*) assumono la forma

$$(b) \quad x' = \alpha x + \beta t \quad , \quad y' = \frac{\beta}{c^2} x + \alpha t$$

Si ricordi ora che il punto *O*', per il quale è $x'=0$, corre colla velocità *v* sul binario e si porta quindi, dopo il tempo *t*, nella posizione $x=vt$. Vuol dire che la prima delle (*b*) deve esser soddisfatta da $x'=0$, e $x=vt$, qualunque sia *t*; ciò esige che sia $\beta=-\alpha v$. Le (*b*) si trascrivono dunque così

$$(c) \quad x' = \alpha(x - vt) \quad , \quad t' = \alpha\left(t - \frac{v}{c^2}x\right).$$

Resta ancora da determinare la costante α. Risolviamo a tal fine le due equazioni (*c*) rispetto ad *x* e *t*; si ottengono così le formule

$$(d) \quad x = \frac{1}{\alpha\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}(x' + vt') \qquad t = \frac{1}{\alpha\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

le quali permettono il passaggio dal *sistema treno* (*x’, t’*) al *sistema binario* (*x, t*). Ora le nuove formule (*d*) non possono differire dalle (*c)* se non per lo scambio di *x, t* con *x’, t’* e *v* con *–v*, giacchè, sotto l’aspetto cinematico, è indifferente riguardare il binario come fisso e il treno in moto colla velocità *v*, oppure il treno fisso e il binario in moto colla velocità *–v*. Si ha dunque dal paragone delle (*c*) e (*d*) l’eguaglianza

$$\alpha = \frac{1}{\alpha\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

donde si ricava

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Sostituendo nelle (c) ad α questo valore otteniamo la prima e la quarta delle formule seguenti:

$$(2) \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

la seconda e la terza dicono che il movimento non altera nè la distanza del punto considerato *P'* dal piano verticale passante per l'asse del binario e del treno, nè l'altezza del punto sul terreno.

Le formule (2) risolte rispetto a x e t conducono a formule dello stesso tipo

$$(2') \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Le (2) o (2') costituiscono la *trasformazione di Lorentz*[6]. L'illustre fisico olandese, fino dal 1895, aveva

6 Le equazioni stesse, in forma poco differente, erano state sta-

notato che le equazioni di Maxwell del campo elettromagnetico, le quali vengono alterate da una trasformazione di Galileo (pag. 8), conservano invece la loro forma se alle lunghezze e ai tempi si applica la sostituzione (2'). Poteva allora nascere il dubbio che nel passaggio da un sistema in quiete ad un sistema in moto i fenomeni meccanici si comportassero diversamente dai fenomeni elettrodinamici, i primi essendo regolati dalle (1) (trasformazione di Galileo), e i secondi dalle (2'). Le vedute di Einstein, che dieci anni dopo (1905) hanno condotto a ritrovare le (2) come conseguenze dei principi *A*) e *B*), hanno rimosso l'inesplicabile dualismo, portando la luce in tutto questo campo.

In realtà, per qualsiasi fenomeno fisico, il passaggio da un primo ad un secondo sistema galileiano di riferimento si effettua mediante le (2) o (2'). Le equazioni che rappresentano il fenomeno devono, nella trasformazione, conservare inalterata la loro forma. Se per i fenomeni meccanici si erano adoperate sinora le (1) senza incontrare contraddizioni colle esperienze, ciò dipendeva dal fatto che per i detti fenomeni il rapporto $\frac{v}{c}$ tra la velocità del mobile e quella della luce è estremamente piccolo e può essere trascurato senza errore sensibile. In questa ipotesi (o rigorosamente nella ipotesi $c=\infty$) le (2') si riducono alle (1).

---

bilite dal Voigt nel 1887 a proposito del problema della propagazione delle onde emesse da sorgenti in moto.

La affermazione α) di pag. 8 non può dunque essere accettata se non in via di approssimazione. In suo luogo sussiste senza restrizioni il teorema seguente che discende dai due principi *A*) e *B*):

β) *Le equazioni che esprimono le leggi fisiche rispetto ad un sistema galileiano non mutano forma se in luogo delle variabili x, y, z, t che compariscono in quelle, si sostituiscono le nuove variabili x', y', z', t' mediante la trasformazione di Lorentz* (2').

VI.
Alterazioni delle misure di spazio e tempo per effetto del moto.

Alcune conseguenze immediate delle (2) e (2') permettono di descrivere in forma precisa certi fenomeni che abbiamo già segnalato.

Prendiamo due punti sull'asse del treno, le cui ascisse, rispetto ad *O'*, siano x_1', x_2'. La distanza dei due punti, per il viaggiatore, è $d' = x_2' - x_1'$ Il cantoniere valuta invece la distanza tra le posizioni che quei punti hanno quando il proprio orologio segna uno stesso istante, ad es. $t = 0$. La prima delle (2), per $t = 0$, dà $x_1 = x_1' \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ $x_2 = x_2' \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Di qua si ricava il valore della distanza quale appare al cantoniere

$$d = x_2 - x_1 = d'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Questa seconda distanza *d* è inferiore alla prima *d'*, perchè il fattore

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \dots$$

è minore dell'unità. Concludiamo che un *corpo in moto appare scorciato nella direzione del moto ad un osservatore in quiete; il fattore di riduzione è* $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ *, dove v è la velocità del corpo rispetto all'osservatore.*

Quel fattore esprime la *contrazione lorentziana* che il Fitz-Gerald e il Lorentz contemporaneamente (1892) avevano attribuito ai corpi in moto allo scopo di spiegare il risultato inatteso della esperienza di Michelson (pag. 14) Per quei fisici la contrazione era effettiva e risultava dal paragone della lunghezza misurata colla *lunghezza assoluta* che spetterebbe al corpo quando fosse in quiete rispetto all'etere. Nella concezione di Einstein questa lunghezza assoluta non ha significato fisico, potendosi solo confrontare lunghezze in moto relativo l'una rispetto all'altra. La contrazione è apparente e risulta dal diverso modo di misurare un corpo da parte di osservatori in quiete o in moto rispetto ad esso, dovendo ciascun osservatore valutare distanze di punti che rappresentino, per esso, posizioni contemporanee.

Poichè si tratta di fenomeni di moto relativo, le parole *quiete* e *moto* dell'enunciato possono scambiarsi; un tratto di binario appare scorciato nello stesso rapporto ad un viaggiatore del treno.

Per le velocità ordinarie, sian pure dei proiettili più rapidi, il fattore di riduzione è molto prossimo all'unità, e la contrazione è inapprezzabile anche ai più perfetti strumenti. La Terra si muove nel suo giro attorno al Sole colla velocità di circa 30 km. al secondo; il diametro diretto nel senso del moto (di circa 12740 km.) dovrebbe apparire scorciato ad un osservatore in quiete rispetto al Sole di cm. 6,4.

Proponiamoci ora di confrontare i tempi segnati da due orologi, uno fermo sul binario, l'altro trasportato dal nostro treno. Ci conviene ricorrere all'ultima delle formule (2') (pag. 31). Se due eventi si verificano nello stesso punto x' del treno quando l'orologio di questo segna gli istanti t_1', t_2', l'intervallo di tempo è, per il viaggiatore, $\tau' = t_2' - t_1'$. Invece per il cantoniere l'intervallo è

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\tau'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Dunque *un intervallo di tempo* τ *misurato da un osservatore in quiete sta all'intervallo* τ', *qual'è misurato da un osservatore mobile, nel rapporto*

$$\frac{\tau}{\tau'} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Rispetto agli orologi scaglionati lungo il binario l'orologio del treno è rallentato. Mentre due orologi fermi, incontrati successivamente, differiscono di un secondo, per il viaggiatore è trascorso soltanto il tempo $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \ldots$ [7]. Il rallentamento è tanto più sensibile quanto più v si avvicina alla velocità della luce. Se un treno potesse spostarsi con questa velocità, il suo orologio apparirebbe segnar sempre lo stesso istante ai cantonieri che incontrasse nella sua corsa.

In queste affermazioni è poi lecito scambiare sistema in quiete e sistema in moto, giacchè si tratta di fenomeni di moto relativo. Precisamente l'orologio di una stazione confrontato coi successivi orologi di un treno lunghissimo in corsa appare rallentato rispetto a questi; la lancetta di quello sembrerebbe quasi immobile ai vari viaggiatori se il treno avesse una velocità di poco inferiore a c.

---

7 Se lungo la eclittica (orbita descritta dalla Terra intorno al Sole) fossero collocati due orologi, in accordo tra loro, e se il tempo impiegato dal centro della Terra per passare dall'uno all'altro fosse di un'ora per questi orologi, lo stesso intervallo misurato da un orologio terrestre apparirebbe diminuito di 18 milionesimi di secondo.

Tanto il fenomeno della contrazione lorentziana, quanto quello del rallentamento degli orologi, o, a dirittura, lo stesso aspetto delle equazioni (2), (2’) (pag. 31) fanno vedere che nessun corpo può muoversi con velocità superiore a quella della luce nei vuoto. Nè con siffatte velocità possono trasmettersi azioni a distanza. Nella nuova meccanica esiste dunque un limite superiore alla velocità, mentre nella meccanica classica si concepivano anche trasmissioni istantanee. Una sbarra spinta ad un estremo trasmetteva istantaneamente, secondo le idee tradizionali, il moto all’altro estremo. Se ciò contrasta colle concezioni della meccanica relativistica, vuol dire che la nozione di rigidità assoluta di un corpo, quale interviene ad es. nella geometria, non ha senso fisico; il che, del resto, era ben prevedibile.

Mentre il treno corre colla velocità v, un viaggiatore lancia, nella direzione del moto, un proiettile con velocità u rispetto al treno. Quale sarà la velocità del proiettile per un cantoniere innanzi al quale esso passi? Secondo la meccanica di Galileo questa velocità, come già dicemmo, è $u+v$. La cosa va diversamente per la meccanica relativistica, giacchè le unità di spazio e tempo del treno, colle quali u è misurata, differiscono dalle unità lineari e temporali del binario che servono a valutare v.

La nuova formula di composizione delle velocità si ottiene subito con un procedimento che qui mi limito ad accennare. Basta immaginare che il proiettile trascini con sè un nuovo sistema di riferimento x'', y'', z'' ed un orologio che segni il tempo t''. Allora mediante formule del tipo (2) (pag. 31) si può collegare questo sistema al sistema *treno* (x', y', z', t'). Si tien poi conto delle (2) che legano il sistema *treno* al sistema *binario* (x, y, z, t); e si ottengono le formule che servono di passaggio tra il sistema *proiettile* e il sistema *binario.* Un calcolo di algebra elementare fa vedere che queste formule sono perfettamente analoghe alle (2), salvo che in luogo della velocità v del treno comparisce la quantità

$$w = \frac{u+v}{1+\frac{uv'}{c^2}} \qquad (3)$$

che rappresenta adunque *la velocità del proiettile rispetto al binario.* Risulta di qua che la legge di composizione delle velocità di Galileo non è rigorosamente esatta, ma dà in pratica una approssimazione ottima perchè il termine $\frac{uv}{c^2}$, che comparisce nella (3), è trascurabile per le velocità ordinarie. Ha invece un effetto sensibile per velocità comparabili con quella della luce. Se potessimo far correre un treno con velocità uguale a $\frac{c}{2} = 150000\, km/sec.$ e lanciare su questo un proiettile colla stessa velocità rispetto al treno, il proiettile avrebbe rispetto al binario la velocità di $\frac{4c}{5} = 240000\, km/sec.$, anzichè 300000 come porterebbe la formula classica.

Se poi u o v od entrambe uguagliano c, la stessa w riesce uguale a c. Componendo più velocità ugualmente dirette non si riesce mai a superare la velocità della luce.

Si trova dovunque riferita, e qui vien solo accennata, una conferma notevole portata alla (3) da un'antica esperienza di Fizeau (1851), ripetuta in seguito più volte con precisione sempre maggiore. Un tubo, lungo il quale passa una corrente d'acqua colla velocità v, viene attraversato longitudinalmente da un raggio di luce. La luce si propaga nell'acqua tranquilla colla velocità $\frac{3}{4}c$, ma l'onda luminosa viene trascinata parzialmente (come si diceva) dal moto del liquido. Precisamente la velocità della luce nell'acqua corrente, misurata da un'osservatore in quiete, non è già $\frac{3c}{4}+v$, bensì

$$\frac{\frac{3c}{4}+v}{1+\frac{3v}{4c}}=\frac{3c}{4}+\frac{7v}{16}+\ldots$$

d'accordo colla (3).

VII.
Il tempo proprio.

Riprendiamo i due sistemi di riferimento (x, y, z, t) e (x', y', z', t') di cui abbiamo fatto uso nello stabilire le formule della trasformazione di Lorentz. Un evento si verifichi quando l'orologio legato al primo sistema segna il tempo t, in un punto P dello spazio avente le coordinate x, y, z. Lo stesso evento, riferito al secondo sistema, abbia luogo nell'istante t' e nel punto x', y', z'. Le quantità scritte sono allora legate dalle relazioni (2) o (2') (pag. 31).

Adoperando queste formule si verifica subito che sussiste l'uguaglianza

$$(4)\quad x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2$$

Si suol esprimere questo fatto dicendo che la espressione di sinistra è *invariante* di fronte alla trasformazione di Lorentz. La stessa proprietà sussiste anche quando si tolga la restrizione finora introdotta che l'asse x' del secondo sistema scorra lungo l'asse x del primo, e si applichi la trasformazione più generale che consente il passaggio da un sistema galileiano $x\,y\,z$ ed un nuovo sistema galileiano $x'\,y'\,z'$ *comunque orientato* rispetto a quello; si suppone solo, ancora per un momento, che in un certo istante t=0, t'=0 le origini O, O' dei due sistemi (in moto relativo) vengano a coincidere.

La proprietà ora rilevata è l'interpretazione algebrica di un fatto fisico. Se nell'istante t=0 parte da 0 una propagazione luminosa in tutte le direzioni nel vuoto, l'onda di luce raggiunge, dopo trascorso il tempo t, la sfera di centro O e raggio ct, che ha, nel primo sistema di riferimento, l'equazione

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$$

La stessa superficie deve pure apparire una sfera di centro O' e raggio ct' ad un osservatore legato col secondo sistema, giacchè la luce si propaga colla stessa velocità e rispetto ad entrambi i sistemi, per il principio *B)* (pag. 19). Le formule di passaggio dall'uno all'altro sistema devono adunque mutare l'equazione ora scritta nell'equazione analoga

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0$$

Di qua segue che il rapporto dei due primi membri è costante, o dipende tutto al più dalla velocità di un sistema rispetto all'altro. Una considerazione ulteriore, fondata sulla perfetta reciprocità dei due sistemi (analoga a quella fatta a pagina 30 per ricavare il valore di α), dimostra che quel rapporto vale proprio 1. E così vien giustificata la (4) senza ricorrere alle formule della trasformazione di Lorentz.

La espressione invariante (4), che ora per maggior comodità scriveremo sotto la forma.

$$(5)\quad t^2-\frac{1}{c^2}(x^2+y^2+z^2)$$

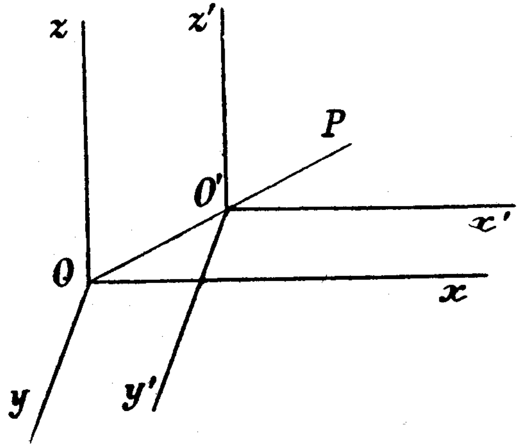

Fig. 3.

ha un significato fisico notevole ove abbia valor positivo. In tale ipotesi si può immaginare un punto *O'* animato di moto uniforme il quale parta da *O* quando l'orologio legato al primo sistema di riferimento segna 0, e, seguendo il segmento *OP*, arrivi in *P*(*x, y, z*) quando lo stesso orologio segna *t*. Infatti la velocità con cui *O* dovrebbe muoversi,

$$v = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{t}$$

è inferiore a *c* se la (5) è positiva, e quindi è raggiungibile, almeno teoricamente. Possiamo ora supporre che il nostro secondo sistema galileiano di riferimento (*x', y', z'*) (fig. 3) abbia l'origine nel punto mobile *O'* e venga da *O'* trascinato nel suo moto. Un orologio trasportato con *O'* segni il tempo 0 quando *O'* parte dalla posizione *O*, e un certo tempo *t'* quando *O'* arriva alla posizione *P*. In questo istante le coordinate di *P* (coincidente con *O'*) sono, rispetto al secondo sistema, $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$. Quindi l'espressione (5) formata coi dati relativi al secondo sistema si riduce al solo termine t'^2. Data la proprietà di invarianza di quella espressione, avremo dunque

$$t'^2=t^2-\frac{1}{c^2}\left(x^2+y^2+z^2\right)=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right).$$

Ora t' è, per ipotesi, il tempo che l'orologio situato in O' impiega per portarsi da O in P con moto rettilineo uniforme, tempo misurato dall'orologio stesso. Lo diremo (con Minkowski) il *tempo proprio* spettante a quel moto.

Vediamo così che l'espressione (5), se è positiva, esprime il quadrato del tempo proprio che un orologio impiega per passare, con moto rettilineo uniforme, da una prima posizione $O(0, 0, 0)$ abbandonata nell'istante 0 ad una seconda posizione $P(x, y, z)$ raggiunta nell'istante t[8].

Si osserverà che nella meccanica classica la durata del viaggio sarebbe espressa da t; nella meccanica relativistica t varia col sistema xyz di riferimento, mentre il tempo proprio $t' \leq t$ è un invariante.

La restrizione che il punto di partenza cada nell'origine O si toglie senza difficoltà; si arriva così al risultato

---

8 Si tenga presente che x, y, z e t sono misure relative ad un sistema galileiano qualsiasi. Comunque questo sia scelto, il tempo proprio t' non varia perchè l'espressione (5) è invariante; e ciò è d'accordo col fatto fisico che il tempo proprio è definito in modo indipendente da ogni sistema di riferimento.

generale:

Un punto che si muove di moto rettilineo uniforme parta dalla posizione x_1, y_1, z_1, *nell'istante,* t_1, *ed arrivi alla posizione* x_2, y_2, z_2, *nell'istante* t_2, *le coordinate e i tempi essendo riferiti a un qualsiasi sistema galileiano; la durata del percorso misurata da un orologio legato al punto mobile (cioè il tempo proprio) è data dalla radice quadrata della espressione*

$$(6) \quad (t_2 - t_1)^2 - \frac{1}{c^2}\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right].$$

Questa espressione va presa in luogo della (5) quando si operi il più generale passaggio da un sistema galileiano ad un secondo sistema galileiano; in questo passaggio essa rimane invariata.

Ritorniamo un momento all'espressione (5) (pagina 41) ed accenniamo al caso che essa abbia valor negativo. Allora (come sarà visto più tardi) si può costruire un sistema galileiano x', y', z', t' tale che risultino contemporanei due eventi i quali si verifichino, rispetto al sistema primitivo, l'uno in $O(0, 0, 0)$ nell'istante 0, l'altro in $P(x, y, z)$ nell'istante t. L'orologio legato al nuovo sistema segnerà lo stesso tempo $t' = 0$ quando i due eventi si presentano, l'uno nel punto $O(0, 0, 0)$, l'altro nel punto P, le cui nuove coordinate siano x', y', z'. La proprietà di invarianza della espressione (5), cambiata di segno, ci dice che

$$\frac{1}{c^2}\left(x^2+y^2+z^2\right)-t^2=\frac{1}{c^2}\left(x'^2+y'^2+z'^2\right).$$

Ora la quantità tra parentesi a secondo membro è il quadrato della *distanza propria* di due punti O e P, cioè della distanza misurata da un osservatore rispetto al quale le posizioni considerate dei due punti siano contemporanee; tale è ad es. la distanza tra la coda e la macchina di un treno misurata da un viaggiatore. Vuol dire che il quadrato della distanza di due posizioni O e P di due punti mobili, misurata da un osservatore rispetto a cui quelle posizioni siano simultanee, è dato dal valore dell'espressione (5) cambiata di segno e moltiplicata per c^2. Se non si introduce il fattore c^2, si ha il quadrato del tempo (per quell'osservatore) che la luce impiega a propagarsi da O a P.

Naturalmente se il primo dei due punti non cadesse nell'origine, in luogo della (5) si dovrebbe adoperare l'espressione (6).

Riassumendo, teniamo presente che, dati due eventi i quali si verifichino in due punti dello spazio, non è definito in modo oggettivo l'intervallo di tempo tra gli eventi se non quando si possa introdurre un sistema di riferimento rispetto al quale gli eventi si presentino nello stesso posto; per questo sistema l'intervallo di tempo è il *tempo proprio*, indipendente dall'osservatore. Nè può definirsi in modo oggettivo la distanza dei due punti-eventi a meno che non si possa introdurre un sistema di riferimento rispetto al quale i due eventi risultino simultanei; per questo sistema la distanza dei due punti è la *distanza propria*, indipendente dall'osservatore. Sia il tempo proprio, sia la distanza propria si ricavano, nel modo detto, dall'invariante (5) o (6), che è positivo nel primo caso e negativo nel secondo.

VIII.
Lo spazio-tempo di Minkowski.

Dalle cose dette sinora appare chiaro che nella nuova meccanica lo spazio ed il tempo son più strettamente legati che nella dottrina di Galileo e Newton. Si presenta quindi l'opportunità di una rappresentazione grafica ove il tempo figuri, per dir così, come una quarta dimensione dello spazio. Questa rappresentazione, suggerita dal Minkowski nel 1909, ha avuto una influenza cospicua nello sviluppo ulteriore della teoria della relatività.

Per giungervi nel modo più semplice ricordiamo anzitutto gli *orari grafici* adoperati dal personale ferroviario. Un tale orario, salvo particolarità senza interesse per noi, può costruirsi rappresentando sul diagramma mediante il punto di coordinate x, t un treno che nell'istante t abbia la distanza x da una stazione origine O. Mentre il treno si muove, il punto immagine descrive sul diagramma una *linea oraria*, che è retta se la velocità è costante, curva in caso opposto. Se il treno è fermo la linea oraria è una parallela all'asse t. Le linee orarie rappresentanti i vari treni in corsa lungo un binario intercettano sopra una parallela all'asse x, condotta all'altezza t, segmenti i cui valori danno le mutue distanze fra i treni nell'istante t considerato.

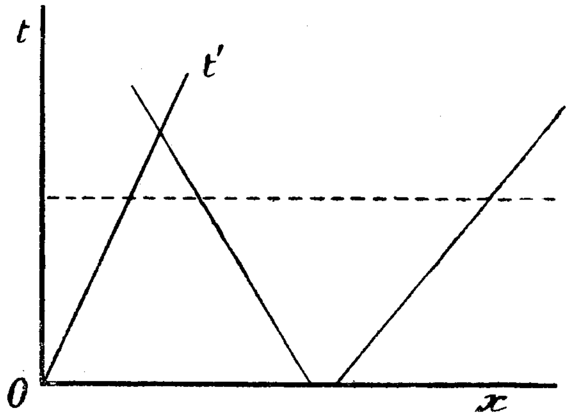

Fig. 4.

Fissiamo l' attenzione sopra una di queste linee orarie ed assumiamola come asse t' di un nuovo sistema xt' di coordinate, al quale riferiamo il diagramma già costruito (fig. 4). La nuova ascissa x' di un punto, immagine di un treno, dà la distanza del treno non più dalla stazione capolinea, ma da un osservatore in moto, che sarà ad es. il macchinista del treno avente t' come linea oraria. Il tempo t' di questo secondo osservatore, che uguaglia il tempo t del primo (nella ipotesi della meccanica classica in cui momentaneamente ci poniamo), può esser valutato sulle nuove ordinate, parallele alla retta *t'*, purchè si alteri in modo opportuno il segmento che rappresenta l'unità di tempo. Dunque lo stesso orario grafico, costruito per un osservatore fermo sulla linea, può servire anche per un osservatore trasportato con moto uniforme, purchè si cambi la direzione dell'asse dei tempi, lasciando immutato l'asse delle distanze.

Il passaggio dall'uno all'altro sistema di coordinate si traduce subito in formule. Se supponiamo ad es. che l'asse *t'* esca da *O* (come sulla figura), si ritrovano le formule (1) (pag. 8) rappresentanti una trasformazione di Galileo. Per le piccole velocità, a cui si riferiscono gli orari grafici ordinari, questa trasformazione è valida con tutta la precisione desiderabile.

Ma se si vuol tener conto anche di moti rapidi e si cerca quindi la rappresentazione geometrica della trasformazione di Lorentz (2) (pag. 31), occorre modificare in parte le considerazioni precedenti. Costruito nel solito modo l'orario grafico relativo ad un primo osservatore (in quiete), si vede dalle (2) che gli assi *t'* (ossia *x'= 0*) e *x'* (ossia *t' = 0*) di un secondo osservatore (in moto) hanno, nelle antiche coordinate *x, t*, le equazioni

$$x - vt = 0 \quad , \quad t - \frac{v}{c^2} x = 0$$

rispettivamente. Ora la prima rappresenta, come pocanzi, la linea oraria *t'* del nuovo osservatore. Ma la seconda equazione non rappresenta più l'antico asse *x*, bensì una retta *x'* uscente da *O* e formante con *x* un angolo sensibile se *v* non è troppo piccolo rispetto alla velocità della luce.

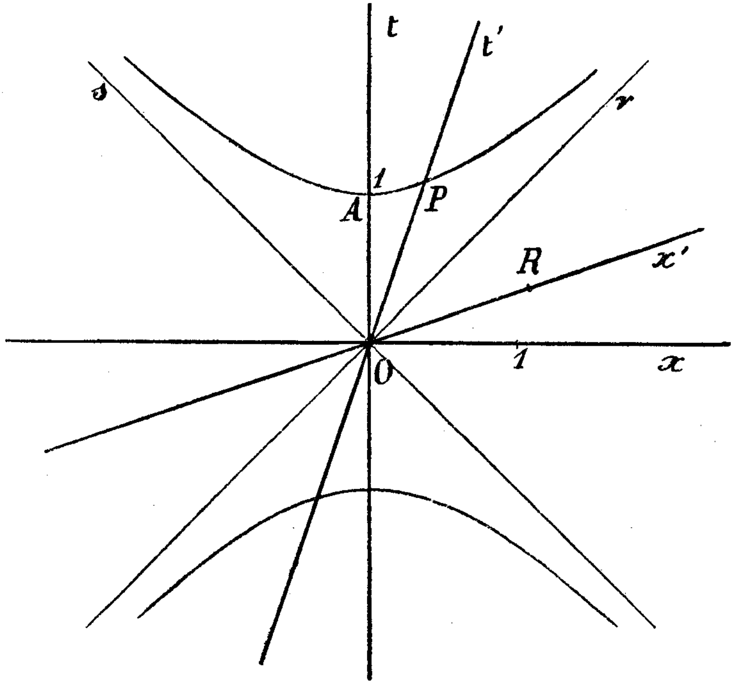

Fig. 5.

Allo scopo di semplificare il linguaggio e la figura scegliamo le unità di lunghezza e di tempo in guisa che la velocità e della luce riesca uguale ad 1. In tal caso i due nuovi assi *t'* ed *x'* sono simmetricamente disposti rispetto alle bisettrici *r, s* dell'angolo $\widehat{xt}$. Queste hanno nel diagramma una importanza fondamentale; sono le linee orarie dei due raggi luminosi partiti da *O* nell'istante 0 e propagartisi lungo il binario nell'uno o nell'altro senso (fig. 5).

Non basta però conoscere le posizioni dei nuovi assi *x', t';* occorre anche sapere con quali unità debbano misurarsi i segmenti situati su di essi o su rette parallele. Il segmento unitario che ha l'origine in *O* e sta sull'asse *t'* ha l'estremo nel punto $x' = 0$, $t' = 1$. Ora risulta facilmente dalle (2') (pag. 31, posto $c = 1$) che questo punto *P* sta sulla curva $t^2 - x^2 = 1$, che è una iperbole equilatera avente per asintoti le rette *r, s* e per asse trasverso la retta *t*[9]. Un segmento uguale su *x'* dà l'unità di lunghezza del secondo osservatore. In breve: i semidiametri della detta iperbole forniscono le unità di tempo per gli assi *t'* a cui appartengono; i semidiametri coniugati danno le unità di lunghezza per i corrispondenti assi *x'*.

Anche qui dunque un unico diagramma è capace di rappresentare i movimenti lungo una retta per vari osservatori che siano in quiete o percorrano la retta di moto uniforme. Ma mentre nella trasformazione di Galileo il cambiamento dell'osservatore portava il mutamento dell'asse dei tempi senza alterazione dell'asse delle distanze, quando si opera una trasformazione di Lorentz si devono far ruotare insieme i due assi coordinati, in verso opposto, intorno all'origine.

Quanto più rapido è il moto di un punto sulla retta

9 Ciò segue anche subito dall'identità

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$$

che nelle ipotesi attuali ($y=y'=z=z'=0$, $c=1$) diviene $x^2 - t^2 = x'^2 - t'^2$. Il punto $x'=0$, $t'=1$ rende $x^2 - t^2 = -1$.

(*binario*), tanto maggiore è l'angolo che la linea oraria del punto nel nostro diagramma, o meglio la tangente alla detta linea, forma coll'asse *t*. Il fatto che nessuna velocità può superare la velocità della luce si traduce nella proprietà che l'angolo ora nominato non può superare l'angolo $\widehat{tr}$ della fig. 5, cioè 45° nell'ipotesi $c = 1$. Un punto mobile che parta da *O* nell'istante 0 potrà portarsi, al progredire del tempo, soltanto in punti aventi le immagini in quell'angolo $\widehat{rs}$ che contiene il semiasse *t* positivo. E poichè le azioni a distanza si trasmettono anch'esse con velocità non superiori a *c*, il *punto-evento O*, cioè un evento che si verifichi in *O* nell'istante 0, non potrà aver come conseguenze che eventi raffigurati da punti del detto angolo. In breve, l'angolo stesso rappresenta l'*avvenire* dell'evento *O*. In senso analogo possiamo dire che l'angolo opposto al vertice rappresenta il *passato* di *O*.

Se *P* è un punto del primo di due angoli $\widehat{rs}$ considerati, la retta *OP* può esser riguardata come asse dei tempi *t'* di un osservatore animato da una velocità teoricamente raggiungibile. Per questo osservatore i due eventi rappresentati da *O* e *P* avvengono nello *stesso luogo*, nel luogo che egli, ritenendosi in quiete, occupa in istanti diversi. Il *tempo proprio* tra i due eventi, qual è valutato dal detto osservatore, è uguale al valore del segmento *OP* misurato coll'unità spettante all'asse *t'* dell'osservatore. Ad es. sulla figura 5 (pag. 49) il tempo proprio *t'* trascorso tra gli eventi *O* e *P* è l'unità di tempo, mentre per l'osservatore in quiete, a cui si riferisce l'asse *t*, l'intervallo di tempo tra i due eventi è uguale alla proiezione ortogonale di *OP* su *t*, misurata coll'unità *OA*.

Cose analoghe si ripetono per due eventi raffigurati da due punti *P*, *Q* tali che la retta *PQ* formi con *t* un angolo minore di 45°.

Consideriamo invece un punto *R* che stia in uno dei due angoli $\widehat{rs}$ contenenti l'asse *x* (fig. 5). L'evento *R* può esser riguardato indifferentemente come posteriore, contemporaneo od anteriore all'evento *O*; il presentarsi di uno di questi tre casi dipende soltanto dalla velocità con cui l'osservatore percorre il binario. Secondo che questa è più o meno piccola, può infatti l'asse *x'* spettante all'osservatore passare al disotto di *R*, o per *R*, o al di sopra di *R*.

Questa avvertenza traduce graficamente il fatto che il concetto di simultaneità è relativo, e che di due eventi come *O* ed *R* non può dirsi quale preceda l'altro, se non si precisa il moto dell'osservatore che esprime il giudizio.

Chiarita la rappresentazione grafica dei movimenti che si verificano sopra una retta, la estensione ai moti piani è immediata. Per un osservatore Ω fisso sopra un piano π e dotato di un orologio la posizione istantanea *P* di un punto mobile ha come caratteristiche le due coordinate *x, y* del punto e l'istante *t* in cui viene osservato. Quella posizione potrà esser dunque raffigurata da un punto *P'* di coordinate *x, y, t* nello *spazio rappresentativo* Σ a tre dimensioni. Mentre *P* si muove sul piano π, il punto immagine *P'* descrive in Σ una *linea oraria*. Un'area mobile in π è rappresentata in Σ da un solido di forma tubulare, ecc.

Ora il diagramma a tre dimensioni di cui stiamo parlando rappresenta anche i movimenti sul piano π quali appariscono ad un secondo osservatore Ω' in moto di traslazione uniforme rispetto ad Ω, purchè il diagramma stesso venga riferito ad un nuovo asse *t'*, che è la linea oraria dell'osservatore Ω', e ad un nuovo piano *x'y'* inclinato opportunamente sul piano *xy*, e purchè le unità di misura sui nuovi assi vengano scelte in modo conveniente.

La rappresentazione grafica riesce anche più suggestiva se si concepisce nel modo che ora dirò. Le linee orarie, i tubi orari sopra nominati si considerino come figure primitive esistenti nello spazio rappresentativo Σ e indipendenti da ogni osservatore, non già costruite da noi. Si supponga poi che un piano *xy* si muova parallelamente a se stesso trasportando un osservatore costretto a percorrere, senza che egli se ne accorga, l'asse *t*. L'osservatore interpreta come posizioni attuali di figure mobili i punti e le aree intersezioni del piano che lo porta colle linee orarie e i tubi orari di Σ. Al crescere del tempo il piano si sposta e variano i punti e le aree suddette. Ma poichè l'osservatore si crede in quiete, egli riguarda quelle variazioni come dovute al movimento di figure nel piano che lo sostiene. Egli prova insomma le impressioni che risentiva l'osservatore Ω fisso su π, di cui, sopra abbiamo discorso[10].

Se poi nel medesimo spazio Σ vien trasportato un secondo osservatore lungo un nuovo asse *t'* da un nuovo piano *x'y'* che si muove parallelamente a se stesso, questo osservatore vedrà pure muoversi e variare le intersezioni colle linee orarie e coi tubi orari e giudicherà che nel proprio piano, da lui ritenuto fisso, avvengono movimenti analoghi a quelli che su π erano seguiti dall'osservatore Ω' sopra considerato. Poichè il piano *x'y'* è inclinato sul piano *xy*, si capisce che uno stesso tubo orario dia sezioni di forma diversa coll'uno e coll'altro piano. A questa diversità di forma, interpretata però tenendo conto anche delle variazioni dell'unità di lunghezza, va attribuito il fenomeno della deformazione lorentziana.

Un ultimo passo resta da compiere per rappresentare i moti che hanno luogo nel nostro *spazio fisico* a tre dimensioni, cioè nello spazio che riguardiamo come teatro dei fenomeni da noi percepiti. Ben poco vi sarebbe da aggiungere, se per questa rappresentazione non occorresse ricorrere ad uno *spazio a quattro dimensioni*. Qui manca naturalmente la intuizione geometrica, ma l'analogia ed un opportuno esercizio mentale possono in buona parte supplirvi. A dir vero la rappresentazione potreb-

10 Si immagini ad es. il cilindro d'ombra prodotto da una nuvola illuminata dal Sole. L'ombra portata sul piano che sostiene l'osservatore varia, tanto se la nuvola si muove, quanto se, restando essa ferma, il piano è trasportato parallelamente a se stesso trascinando l'osservatore.

be esporsi con linguaggio puramente aritmetico, e sotto questo rapporto non presenterebbe maggiore difficoltà individuare la posizione di un punto mobile mediante quattro numeri x, y, z, t, anzichè mediante tre x, y, t. La nomenclatura geometrica giova però a dare maggior rilievo alla rappresentazione stessa, e perciò non vogliamo rinunziarvi. Il lettore che fosse imbarazzato a seguire il nuovo linguaggio può sempre supporre nulla la coordinata z e ridursi così al caso già esaminato.

Ad un punto P mobile nello spazio fisico S, il qual punto occupi nell'istante t la posizione (x, y, z), faremo corrispondere un punto P' dello *spazio rappresentativo* o *spazio-tempo* Σ a quattro dimensioni, precisamente quel punto che ha le coordinate x, y, z, t. Mentre P si muove in S, P' descrive in Σ la corrispondente linea oraria.

Anche qui, perchè la rappresentazione riesca veramente feconda, conviene riguardare le figure dello spazio-tempo come aventi una esistenza reale, indipendente dalla posizione dell'osservatore e dai mezzi di riferimento di cui egli si serve. Un essere onnisciente, che potesse abbracciare collo sguardo il passato, il presente e l'avvenire, vedrebbe l'intera linea oraria di ogni particella materiale estendentesi all'infinito nel passato e nel futuro. Noi, al contrario, di quella linea percepiamo in ogni istante solo un punto, e riguardiamo come *presente* la intersezione della linea stessa collo spazio a tre dimensioni t = costante che corrisponde al momento di osservazione. Il detto spazio si trasporta parallelamente a se stesso al crescere del tempo e ci lascia apparire via via i successivi punti della linea oraria, cioè le successive posizioni della particella materiale[11].

Per un secondo osservatore in moto di traslazione uniforme rispetto al primo le figure dello spazio-tempo rimangono immutate, il diagramma è sempre lo stesso. Cambiano però gli assi di riferimento. Il nuovo asse del tempo t' è la linea oraria che rappresenta il moto del secondo osservatore rispetto al primo. Variando la direzione del detto asse varia pure, in modo determinato, l'orientazione dello spazio a tre dimensioni contenente gli altri tre assi x', y', z'. Il nuovo osservatore percepisce in ogni istante le intersezioni delle linee orarie fisse collo spazio a tre dimensioni t' = costante che corrisponde a quell'istante, e che si trasporta parallelamente a se stesso al crescere del tempo.

Lo spazio-tempo è dunque unico, indipendente dall'osservatore. Ma per diversi osservatori varia, se così può dirsi, la scomposizione dello spazio-tempo in tempo e spazio tridimensionale, potendosi in infiniti modi scegliere l'asse dei tempi, con che resta determinata l'o-

11 «Ecco qua una serie di ritratti della stessa persona a otto anni, a quindici, a diciasette, a ventitrè e via di seguito. Sono tutti, evidentemente, le sezioni o, per dir così, le rappresentazioni su tre dimensioni del suo essere a quattro dimensioni, che è una cosa fissa e inalterabile». In queste parole scritte nel 1895 da H. G. Wells nel suo celebre romanzo *The Time Machine* (*Una esplorazione nel futuro*), vi è il germe di una idea alla quale, quattordici anni dopo, Minkowski ha dato forma scientifica.

rientazione dello spazio[12].

Nel passaggio da un osservatore ad un altro mutano non solo le direzioni degli assi coordinati a cui lo spazio-tempo vien riferito; ma pure le unità di misura. A noi basta tener presente, che (per ragioni analoghe a quelle esposte a pag. 49) se le unità di misura del tempo si portassero nello spazio rappresentativo Σ, a partire dalla origine *O* del sistema di coordinate *x, y, z, t,* in tutte le direzioni accettabili[13], gli estremi di questi segmenti costituirebbero la *superficie a tre dimensioni* avente, nel detto sistema di coordinate, la equazione

$$t^2 - \frac{1}{c^2}(x^2 + y^2 + z^2) = 1$$

---

12 Per il lettore, a cui un'analogia, sia pur superficiale, può giovare, ricorderò che nella meccanica elementare la scomposizione di una stessa forza, di una stessa velocità,.... nelle due componenti verticale e orizzontale varia secondo la posizione di un individuo sulla superficie terrestre, in causa del cambiamento di direzione della verticale. Come è soggettivo il concetto di verticale, così è relativa, per l'osservatore nominato nel testo, la direzione dell'asse dei tempi o, in linguaggio fisico, la misura degli intervalli di tempo.

13 Come asse *t'* può scegliersi qualunque retta uscente dall'origine ed interna al *cono*

$$t^2 - \frac{1}{c^2}(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

le rette costituenti il cono sono le linee orarie delle propagazioni luminose che partono da *O* nell'istante t = 0.

Ogni segmento *P'Q'* dello spazio-tempo che appartenga ad una retta oraria dovrà esser misurato coll'unità che spetta all'asse *t'* parallelo al detto segmento. Ove si accetti questa convenzione, si riconosce[14] che la distanza *P'Q'* di due punti aventi le coordinate (x_1, y_1, z_1, t_1) e (x_2, y_2, z_2, t_2) è data dalla radice quadrata della espressione

$$(6) \quad (t_2 - t_1)^2 - \frac{1}{c^2}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]$$

già incontrata a pag. 43

Ora si ricordi il significato fisico della detta radice (pag. 43). Essa esprime il *tempo proprio* che un punto animato da moto rettilineo uniforme, nel nostro spazio fisico *S*, impiega per passare dalla posizione (x_1, y_1, z_1) abbandonata nell'istante t_1, alla posizione (x_2, y_2, z_2) raggiunta nell'istante t_2. Dunque la lunghezza di *P'Q'* valutata secondo la convenzione da noi fatta, della quale apparisce così l'opportunità, ha un significato fisico preciso ed esprime un tempo proprio, indipendente dal sistema di coordinate in cui si opera.

È specialmente interessante il caso che i due punti *P', Q'* siano infinitamente vicini e rappresentino dunque due successive posizioni di un punto mobile. Supponiamo che un punto dello spazio fisico *S* occupi nell'istante

14 Basta a tal fine eseguire un semplice calcolo; od anche, senza calcolo, basta assumere provvisoriamente la retta *P'Q'* come asse dei tempi *t'* di un nuovo sistema di coordinate, valutare in relazione a questo il segmento $P'Q' = t_2' - t_1'$, e poi ritornare al sistema primitivo ricordando che l'espressione (6) non cambia valore nella trasformazione di coordinate (pag. 43).

t la posizione *x, y, z,* e nel successivo istante $t + dt$ la posizione $x + dx, y + dy, z + dz$ (dove *dx, dy, dz, dt* indicano gli incrementi estremamente piccoli che subiscono le coordinate e il tempo nel passaggio del punto mobile dalla prima posizione alla seconda). In questo caso la lunghezza del segmento infinitesimo *P'Q'* nello spazio-tempo è data dalla radice quadrata della espressione

$$(7) \quad ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)$$

Val la pena di ricordare questo risultato e la sua interpretazione fisica sotto la forma:

Un punto mobile dello spazio fisico si porti dalla posizione x, y, z occupata nell'istante t alla posizione successiva x+dx, y+dy, z+dz raggiunta nell'istante t+dt. Il tempo proprio impiegato dal punto in questo spostamento e la lunghezza (convenzionale) del segmento infinitesimo che lo rappresenta nello spazio-tempo sono dati dalla radice quadrata del secondo membro della (7).

Nell'enunciato non si dice che il movimento del punto è rettilineo uniforme, giacchè questa avvertenza è superflua quando si tratti di uno spostamento infinitesimo. Nè si precisa il sistema di coordinate *x, y, z, t* impiegato, perchè la (6) e quindi la (7) sono invarianti di fronte alle trasformazioni di coordinate che noi eseguiamo[15].

---

15 È questa la ragione perchè (nell'ipotesi $c = 1$) noi definiamo il quadrato della distanza di due punti infinitamente vicini di Σ mediante la espressione $dt^2 - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)$, anzichè me-

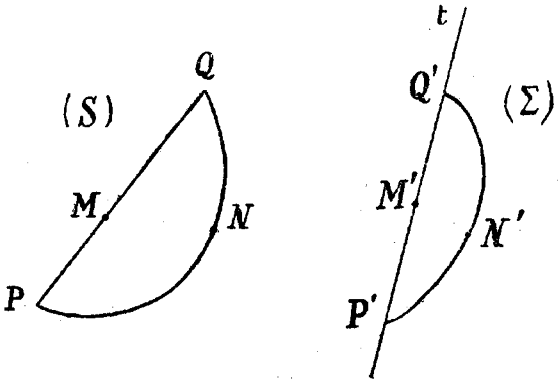

Fig. 6.

Mediante la formula (7) siamo in grado di valutare il tempo proprio che impiega un punto mobile nel nostro spazio fisico per descrivere un determinato cammino *PQ*, anche se la linea *PQ* è curva e la velocità variabile. La linea oraria corrispondente nello spazio-tempo Σ sarà un arco di curva *P'Q'*, i cui estremi abbiano le coordinate (x_1, y_1, z_1, t_1) e (x_2, y_2, z_2, t_2) (fig. 6). Noi spezzeremo il cammino nello spazio fisico in un numero enormemente grande di cammini parziali, così piccoli da poter ritenere descritto ciascuno di questi con moto rettilineo uniforme. Nella rappresentazione in Σ l'arco *P'Q'* verrà spezzato in tanti archetti piccolissimi che si confonderanno colle rispettive corde. Per ciascuno di quei cammini in-

---

diante la $dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ che la estensione del teorema di Pitagora suggerirebbe. Infatti l'ultima espressione, al contrario della precedente, non è invariante di fronte alle trasformazioni di Lorentz e non può aver quindi interesse fisico.

finitesimi vale la uguaglianza fra tempo proprio impiegato a percorrerlo e lunghezza (convenzionale) del segmentino rappresentativo in Σ; entrambi sono dati, per la (7), da una espressione del tipo

$$\sqrt{dt^2-\frac{1}{c^2}\left(dx^2+dy^2+dz^2\right)}=\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}}\,dt=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt$$

dove *dx, dy, dz, dt* rappresentano gli incrementi delle coordinate e del tempo (rispetto ad un osservatore determinato) nel passaggio dall'uno all'altro estremo del cammino infinitesimo, e *v* è la velocità colla quale il detto cammino è percorso. Sommando tutti i contributi parziali analoghi si conclude che anche in questo caso la lunghezza dell'arco rappresentativo *P'Q'* uguaglia il tempo proprio impiegato dal punto mobile nello spazio fisico per portarsi da *P* in *Q* lungo il corrispondente cammino. Entrambi sono espressi, secondo la solita notazione del Calcolo, dalla somma o integrale

$$(8)\qquad \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}}\,dt$$

Per eseguire l'integrazione occorre naturalmente conoscere la traiettoria

$$x=f(t),\ y=\varphi(t),\ z=\psi(t)$$

del punto mobile nello spazio fisico, o almeno la velocità scalare *v*, generalmente variabile, con cui i singoli tratti della curva vengono descritti.

Risulta così pienamente giustificata la convenzione introdotta per misurare le distanze nello spazio-tempo con unità che dipendono dalla direzione nel modo già indicato (pag. 57). Grazie a questa convenzione il tempo proprio impiegato da un punto a percorrere un cammino qualsiasi, di moto uniforme o vario, è sempre uguale alla lunghezza dell'arco rappresentativo in Σ.

IX.
Una nuova formulazione della legge d'inerzia.

Due punti mobili *M, N* nello spazio fisico *S* partono insieme dalla posizione $P(x_1, y_1, z_1)$ quando l'orologio di un osservatore in quiete segna t_1, ed arrivano insieme alla posizione $Q(x_2, y_2, z_2)$ quando lo stesso orologio segna t_2; il punto *M* descrive il segmento rettilineo *PQ* di moto uniforme, il punto *N* descrive in modo qualsiasi un arco *PNQ* (fig. 6, pag. 60). Quale dei due punti impiegherà il maggior tempo proprio a portarsi da *P* in *Q*?

La domanda sembra ingenua, ed è tale infatti nella meccanica classica dove entrambi i tempi son dati da $t_2 - t_1$. Ma nella meccanica relativistica l'andamento di un orologio dipende dalla velocità con cui è mosso, ed è tanto più lento quanto maggiore è questa velocità. Il confronto tra i due intervalli di tempo proprio deve dunque esser fatto e può compiersi nel modo più facile.

Segniamo a tal fine nello spazio-tempo Σ il diagramma composto del segmento rettilineo *P'M'Q'* e dell'arco *P'N'Q'*, che forniscono le linee orarie dei due moti. Noi possiamo assumere *P'Q'* come asse del tempo t di un osservatore, che accompagnerà M nel suo moto uniforme; possiamo anzi supporre che sia questo l'osservatore che riscontra i tempi t_1 e t_2 quando i punti mobili partono da P o arrivano in Q. La differenza $t_2 – t_1$ dà allora il tempo proprio che M ha impiegato a portarsi di moto uniforme da P in Q. D'altra parte il tempo proprio impiegato da N a descrivere l'arco PNQ è dato dall'integrale (8) (pag. 61), cioè dalla somma di un numero grandissimo di termini del tipo

$$(9) \quad \sqrt{1-\frac{1}{c^2}\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}}\,dt=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt$$

Ora ciascuno di questi termini è minore del corrispondente fattore dt, perchè il radicale è inferiore ad 1. Sommando tutte le analoghe disuguaglianze si ottiene

$$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}}\,dt\leq\int_{t_1}^{t_2}dt=t_2-t_1$$

Vuol dire che il punto M, muovendosi di moto rettilineo uniforme per passare da P in Q, impiega un tempo proprio maggiore di quello spettante a qualsiasi altro moto che conduca da P in Q[16].

Il risultato, di cui l'importanza apparirà più tardi, si enuncia così: *di più punti che partano insieme da una stessa posizione ed arrivino insieme ad una nuova posizione impiega il massimo tempo proprio il punto che si muove di moto rettilineo uniforme*.

Il minimo tempo proprio, che è zero, si ottiene invece se ogni elemento (8) dell'integrale, cioè ogni termine della somma, si annulla, il che avviene se costantemente è

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=c^2, \quad \text{ossia } v = c$$

Il punto mobile ha in ogni istante la velocità della luce. Si immagini ad es. un raggio luminoso che parta da P nell'istante t_1 e mediante successive riflessioni sia costretto a seguire un cammino così lungo che la propagazione luminosa raggiunga Q nell'istante t_2; se un orologio potesse accompagnare la fronte d'onda, esso segnerebbe sempre lo stesso istante durante tutto il percorso.

È curiosa l'interpretazione geometrica del risultato. I tempi propri relativi ai cammini *PMQ*, *PNQ* uguagliano le lunghezze del segmento *P'Q'* e dell'arco *P'N'Q'* misurate secondo le nostre convenzioni. Quest'arco risulta dunque *minore* del segmento che ne congiunge gli estre-

16 Il segno = nell'ultima formula è accettabile soltanto se $dx = dy = dz = 0$, cioè se il punto N sta fermo rispetto al sistema di riferimento, il che precisamente succede per M.

mi. Una retta oraria nello spazio-tempo segna il *massimo* anzichè il minimo percorso tra due suoi punti qualsiansi. L'affermazione paradossale non deve stupire, giacchè, per i nostri scopi fisici, abbiamo trovato opportuno di misurare le distanze in Σ mediante un'unità che varia secondo le direzioni. Era dunque d'aspettarsi di incontrare proprietà geometriche diverse dalle consuete adottando una convenzione che contrasta con quella della invariabilità dell'unità di misura.

L'ultimo enunciato, di natura cinematica, può presentarsi in forma dinamica se dall'antica meccanica prendiamo la legge di inerzia e la nozione di forza. Rispetto ad un sistema galileiano (e tali sono tutti i sistemi di cui ci siamo valsi sinora) un punto materiale libero si muove di moto rettilineo uniforme; il punto si muove invece di moto vario se su di esso agisce una forza. Tenuto conto di ciò, possiamo enunciare, nella meccanica relativistica, la legge di inerzia sotto la forma seguente che, come poi vedremo, è suscettibile di larga estensione:

Di più punti materiali che partano insieme da una stessa posizione ed arrivino insieme ad una stessa posizione impiega il massimo tempo proprio quel punto che si muove di moto libero (cioè non è soggetto a nessuna forza).

Le differenze di tempi propri contemplati in questo enunciato sono estremamente piccole per le consuete velocità terrestri e non si prestano a verifiche. Conviene ricorrere a fenomeni astronomici, ma nuove difficoltà sorgono allora.

Immaginiamo che in un punto fisso dell'eclittica (orbita della Terra intorno al Sole) possa stare un osservatore. Questi vedrebbe ogni anno passare la Terra avanti a sè e potrebbe confrontare il suo orologio con un orologio terrestre. Dopo un anno egli troverebbe un disaccordo di una frazione di secondo.

La differenza può valutarsi facilmente se ci poniamo nelle ipotesi in cui abbiamo ragionato sinora e facciamo astrazione dal campo gravitazionale prodotto dal Sole. Siamo allora condotti a ritenere che l'osservatore, in quiete rispetto al Sole, obbedisca alla legge di inerzia, mentre la Terra è costretta da un vincolo a ruotare intorno al Sole, come fa un sasso nella fionda. In tal caso dovrebbe l'orologio dell'osservatore segnare un sesto di secondo di più dell'orologio terrestre.

Ma se teniamo conto dell'attrazione esercitata dal Sole, come faremo nella seconda parte di questo opuscolo, la questione si complica. Sotto questo nuovo punto di vista, che fu adottato da Einstein nella *relatività generale* (1914-1918), si deve ritenere l'osservatore *vincolato* all'eclittica, giacchè se fosse lasciato libero cadrebbe sul Sole; la Terra invece si comporta come se si muovesse *liberamente* entro il campo gravitazionale solare. Lo spazio-tempo relativo a questa ipotesi ha proprietà metriche diverse da quelle considerate nelle pagine precedenti. Di ciò è necessario tener conto per fare il confronto tra i tempi propri dell'osservatore e della Terra. Tuttavia il risultato numerico non differisce sensibilmente da quello sopra citato.

L'esperienza nella forma qui suggerita è ineseguibile. Ma opportunamente modificata essa conduce al confronto tra i periodi di vibrazione di una stessa radiazione luminosa emessa sul Sole o sulla Terra. Le verifiche fatte sinora in proposito sembrano dar ragione alle previsioni della nuova teoria, alla quale sono dedicate le pagine seguenti.

PARTE SECONDA
INERZIA E GRAVITAZIONE

X.
Sistemi galileiani e gravitazione.

I sistemi di riferimento di cui ci siamo valsi nella prima parte di questo scritto sono tutti *galileiani* (pag. 6). Che sistemi galileiani possano costruirsi a grandissima distanza dalla materia è generalmente ammesso. Ma l'esistenza di sistemi siffatti, in senso rigoroso, può lasciar qualche dubbio sulla Terra o nello spazio interplanetario.

Abbiamo affermato, a dir vero, a pag. 6, che una stanza, un edifizio è un sistema galileiano, o, meglio, sarebbe tale se la Terra, anzichè ruotare intorno al proprio asse, volgesse sempre la stessa faccia alle medesime stelle fisse. Effettivamente una palla lanciata sul pavimento della stanza si muove in linea retta con velocità che sarebbe costante se si sopprimessero le resistenze e gli attriti. Ma se vien dato un impulso alla palla ad una certa altezza, essa cade descrivendo una parabola. Risponde la meccanica razionale che la palla, in queste condizioni, non è libera; essa si muoverebbe in linea retta se la forza di gravità non la attirasse verso il centro della Terra. Il moto della palla è la risultante di un moto rettilineo uniforme previsto dalla legge di inerzia e di un moto verticale accelerato dovuto alla gravità.

Per confermare questa veduta la meccanica classica cita altri esempi di moti forzati. Così, sullo stesso pavimento, una palla lanciata non si muoverebbe in linea retta, con velocità costante, se fosse legata ad un punto fisso mediante un filo elastico, o se, essendo di ferro dolce, passasse nelle vicinanze di una calamita; ecc.

È innegabile che questi evidenti esempi di forze perturbatrici presentano analogie col caso della gravità. Ma le analogie non devono gettar ombra sulle differenze.

In primo luogo le forze provenienti dalla tensione del filo, dalla presenza di un campo elettrico o magnetico possono esser variate a nostro arbitrio in grandezza e direzione; mentre noi non possiamo in nessun modo alterare l'attrazione che un corpo subisce dalla Terra o dal Sole.

In secondo luogo (e qui risiede la differenza più saliente) una qualsiasi di quelle forze agisce in modo diverso su corpi diversi ugualmente situati; al contrario, corpi siffatti si comportano nell'identico modo in un campo gravitazionale. A parità di tensione di un filo elastico, l'accelerazione[17] di una palla mobile ad esso legata è inversamente proporzionale alla massa (cioè al peso) della palla; la velocità acquistata alla fine del primo secondo da un carro merci messo in moto da un cavallo è inversamente proporzionale al peso del carro. Il fenomeno si presenta in modo diverso nel caso dei gravi

17 L'accelerazione è, in pratica, l'incremento o diminuzione di velocità per secondo.

cadenti: un sassolino di un grammo ed un masso di una tonnellata acquistano cadendo (nel vuoto) la stessa velocità nello stesso tempo.

È nota la spiegazione che si dà ordinariamente di questa differenza. Si osserva che la forza colla quale un corpo è attratto dalla Terra è direttamente proporzionale alla massa del corpo, è uguale cioè alla massa moltiplicata per un coefficiente che dipende solo dal posto dove il corpo si trova; d'altra parte l'accelerazione si ottiene dividendo la forza per la massa. Poichè una stessa quantità comparisce dunque nei due termini di una divisione, il quoziente, *accelerazione*, risulta indipendente dalla detta quantità, *massa*. Lo stesso fatto succederebbe nell'esempio dei carri merci se, per un caso singolare, a trascinare ciascun carro si presentassero spontaneamente tanti cavalli quante fossero le tonnellate esprimenti il peso del carro.

Questa spiegazione, che introduce uno stesso fattore nel dividendo e nel divisore allo scopo di dimostrare che il quoziente non dipende da quello, sembra alquanto artificiosa. Essa, per lo meno, postula una proprietà singolare della gravità, e in generale dell'attrazione esercitata dalla materia, che distingue quella forza da tutte le altre conosciute.

Sul carattere misterioso della gravitazione, esistente dovunque è materia, propagantesi in modo ignoto a distanze sconfinate, immutabile (a quanto pare) di fronte ad ogni azione che si sia tentato di esercitare su di essa, hanno meditato i più insigni cultori della filosofia naturale. Nessuno da questo esame aveva saputo trarre le conseguenze grandiose che costituiscono la teoria della gravitazione di Einstein.

Per Alberto Einstein la gravitazione non è propriamente una forza, nel senso che si attribuisce d'ordinario a questa parola. La gravitazione è una particolarità geometrica dello spazio, o, meglio, dello spazio-tempo a quattro dimensioni. Un grave cadente non descrive una curva per ubbidire ad una forza, ma perchè la detta curva ha una proprietà saliente nello spazio-tempo ove esiste materia, proprietà analoga a quella che distingue una retta nello spazio-tempo vuoto. Il grave cadente si muove *liberamente* nello spazio deformato dalla materia attraente. Un tal modo di vedere sembra, più dell'antico, conforme al giudizio dell'ingenuo buon senso. Perchè dobbiamo infatti, coll'antica meccanica, chiamar *libera* una palla posata sul pavimento, mentre la resistenza di questo impedisce alla palla di cadere? Perchè, al contrario, dobbiamo riguardare come *soggetto a forza* un grave cadente, sebbene non appaia qui nessun vincolo che sia ad esso applicato?

Accolto questo nuovo concetto di moto libero, la forma che ordinariamente vien data alla legge di inerzia dovrà esser modificata. Per lo meno non potrà più venir riguardato come sistema galileiano una terna di assi legata alla Terra, poichè rispetto ad un tal sistema un corpo libero, cioè un grave cadente, descrive una parabola anzichè una retta. Esisteranno tuttavia sistemi galileiani nel campo gravitazionale terrestre? In altre parole: la traiettoria di un grave cadente che per noi, fissi sulla Terra, è una parabola, potrà da un altro osservatore esser riguardata come rettilinea?

Questa domanda sembrerà alquanto strana al lettore. Come mai una stessa traiettoria può esser curvilinea per me e rettilinea per un'altra persona?

Una semplice riflessione darà la risposta. Immaginiamo un ascensore cadente liberamente nel vuoto. Un sasso abbandonato senza impulso ad una certa altezza dal pavimento dell'ascensore discende colla stessa velocità di questo e quindi è immobile rispetto a chi sta nella cabina. Se il sasso invece vien lanciato in direzione orizzontale, esso, dopo un secondo, avrà percorso un certo cammino in questa direzione abbassandosi però contemporaneamente (rispetto ad un osservatore esterno) di m. 4,90 al disotto del livello primitivo; ma poichè di altrettanto è disceso l'ascensore, il sasso sarà rimasto alla stessa altezza sul pavimento ed avrà descritto una retta per l'osservatore interno, mentre la traiettoria è una parabola per l'osservatore fisso sulla Terra. La cabina dell'ascensore cadente (fatta astrazione dal moto diurno della Terra) fornisce un sistema galileiano per una regione ristretta, in teoria infinitamente piccola, dello spazio; il sistema servirebbe per tutto lo spazio se le linee di forza del campo gravitazionale fossero tutte parallele, anzichè concorrenti al centro della Terra.

Supponiamo note le leggi del moto che un determinato campo gravitazionale impone ai corpi in esso immersi. Si può allora indagare se nel campo esistano sistemi galileiani. Introdotto lo spazio-tempo rappresentativo del campo, la ricerca si riduce alla risoluzione di un problema di geometria differenziale a quattro dimensioni.

Per chiarire il problema giova considerare una questione analoga che si presenta nel caso delle superficie (enti a due dimensioni). A questo scopo mira la digressione che forma argomento del paragrafo seguente.

XI.
Digressione sulle carte geografiche.

Una carta geografica non può dare una nozione esatta della regione rappresentata se non si conosce la *scala*, cioè il rapporto fra le distanze sulla carta e le corrispondenti distanze sulla superficie terrestre. Ma se la regione a cui la carta si riferisce è vasta, la scala varia da punto a punto e può variare inoltre secondo la direzione. Occorre in tal caso, per ogni coppia di punti sufficientemente vicini dati sulla carta, conoscere la effettiva distanza dei due punti corrispondenti sulla Terra. Di solito si procede così. Si fissa sulla carta un sistema di coordinate, per es. cartesiane, e si considerano due punti vicinissimi A, B di coordinate (x, y) e $(x + dx, y + dy)$. I due punti corrispondenti A_0, B_0 della superficie terrestre avranno una certa distanza che dipende da *x, y, dx, dy.* Si dimostra che il quadrato ds^2 di questa distanza è dato sempre da una formula del tipo

$$(10)\quad ds^2 = g_{11}\, dx^2 + 2 g_{12}\, dx dy + g_{22}\, dy^2$$

dove g_{11}, g_{12}, g_{22}, sono tre espressioni contenenti le coordinate *x, y* del punto *A*, sono cioè funzioni di *x, y,* ma non di *dx, dy.* La natura di queste tre funzioni dipende dalle proprietà della superficie rappresentata sulla carta e dalla *proiezione* in cui questa è disegnata.

Costruiamo ad es. la carta di una regione della Terra, supposta sferica, col far corrispondere al punto di longitudine x^0 e di latitudine y^0 il punto della carta che ha l'ascissa di *x* cm. e l'ordinata di *y* cm. In tal caso la formula (10) assume l'aspetto particolare

$$(11)\quad ds^2 = a^2 \left(\cos^2 y \cdot dx^2 + dy^2 \right)$$

dove *a* è un numero formato da otto cifre uguali ad 1 se la distanza è misurata sulla superficie terrestre in centimetri[18]. Nella (11) dunque è

$$g_{11} = a^2 \cos^2 y, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = a^2.$$

Questa espressione (11) dell'*elemento lineare ds*, o questi valori delle *g* sono noti *a priori* nell'esempio trattato, perchè conosciamo le proprietà della superficie sferica che fu rappresentata sulla carta. Ma quando pure si

18 Si ricordi che un grado di un meridiano vale km. 111,111...

ignorasse la forma della superficie terrestre e si ricorresse alla espressione più generale (10), si riuscirebbe a calcolare punto per punto i valori delle tre funzioni g, confrontando opportunamente misure eseguite sulla carta con misure eseguite sulla superficie. Se si riscontra, ad es., che, a partire da un certo punto (x, y) della carta, uno spostamento $dx = 1$ cm. parallelamente ad x (quindi per $dy = 0$) equivale ad uno spostamento di $90 \cdot 10^5$ cm. sulla superficie terrestre, mentre uno spostamento $dy = 1$ cm, parallelamente ad y ($dx = 0$) rappresenta uno spostamento di $111 \cdot 10^5$ cm., si deduce dalla (10) che

$$90 \cdot 10^5 = \sqrt{g_{11}}, \quad 111 \cdot 10^5 = \sqrt{g_{22}},$$

Con ciò due dei coefficienti g sarebbero noti nel particolare punto (x, y), ed il terzo coefficiente si otterrebbe in modo analogo eseguendo misure in una terza direzione.

Quando in ciascun punto (x, y) della carta geografica si conoscano i valori di g_{11}, g_{12}, g_{22} e quindi l'espressione (10), si può, per ogni linea tracciata sulla carta, calcolare la lunghezza della linea corrispondente della superficie rappresentata, per ogni angolo segnato sulla carta calcolare l'angolo corrispondente della superficie. In breve tutte le particolarità metriche di figure esistenti sulla superficie si possono leggere sulla carta. Si riesce anche a tracciare sulla carta quelle linee le cui corrispondenti sulla superficie segnano il più breve cammino tra due loro punti, giacchè di queste linee, *geodetiche*, si possono scrivere le equazioni quando sia nota la forma (10) dell'elemento lineare.

Abbiamo sino a questo punto costruita la carta partendo dalla superficie. Ma si può anche seguire il cammino inverso, quando si faccia astrazione naturalmente dagli scopi geografici e si guardi solo all'interesse geometrico. A tal fine si assegni a priori una espressione come la

$$(10) \quad ds^2 = g_{11}dx^2 + 2g_{12}dxdy + g_{22}dy^2$$

si diano cioè tre funzioni g_{11}, g_{12}, g_{22} di x ed y. Comunque queste siano scelte (purchè una certa disuguaglianza sia soddisfatta), si può costruire una superficie sulla quale la distanza di due punti vicinissimi individuati dai numeri (x, y) e $(x + dx, y + dy)$ è fornita dalla radice quadrata dell'espressione (10); vuol dire che la superficie può rappresentarsi sul piano cartesiano (o sulla *carta*) xy in guisa che la *scala* sia fornita da quella radice quadrata. In realtà superficie corrispondenti alla (10) si possono costruire in infiniti modi. Ma tutte queste superficie sono *applicabili* le une sulle altre; da una di esse, formata di un tessuto flessibile ma inestendibile, io posso ottenere le altre flettendo in tutti i modi possibili il tessuto senza lacerarlo o duplicarlo.

Due qualsiansi di queste superficie sono riferite tra loro in modo che archi corrispondenti di curve hanno la stessa lunghezza, e sono pure uguali angoli corrispondenti, aree corrispondenti... In breve le proprietà metriche delle figure tracciate sulle due superficie, considerate indipendentemente dallo spazio esterno, o, come brevemente si dice, le *proprietà intrinseche*, sono le stesse. Così ad es. le proprietà intrinseche di un cilindro (tagliato lungo una generatrice) non differiscono dalle proprietà metriche del piano, perchè il cilindro può svilupparsi sul piano senza che mutino le misure degli archi, degli angoli, ecc. Diremo dunque che, data una espressione come la (10), rimane determinata una famiglia di superficie, applicabili le une sulle altre; o, se si preferisce, rimane determinata una superficie a meno di una flessione del tessuto da cui è formata. Quelle superficie sono tutte rappresentabili sopra una stessa carta geografica colla stessa scala fornita dalla radice quadrata della (10).

Sotto l'aspetto fisico la costruzione della superficie, data la carta e la scala, può pensarsi eseguita così: si supponga che la carta sia costituita da fibre elastiche e che la distanza di ogni coppia di punti vicinissimi (x, y), $(x+dx, y+dy)$, la quale sulla carta vale $\sqrt{dx^2+dy^2}$, si allunghi o si accorci in guisa da raggiungere la lunghezza $\sqrt{g_{11}dx^2+2g_{12}dxdy+g_{22}dy^2}$ data dalla (10); la carta in conseguenza si piegherà ed assumerà la forma di una delle superficie nominate.

Portiamo due esempi. Se la (10) si riducesse alla forma

$$(12) \quad ds^2=dx^2+dy^2,$$

la superficie sarebbe il piano stesso da cui si parte, od una superficie applicabile su di esso (cilindro, cono, ecc.); la geometria delle figure tracciate sulla superficie seguirebbe le leggi della planimetria euclidea. Se invece il ds^2 avesse l'espressione data dalla (11) (pag. 75), la superficie sarebbe una sfera di raggio a (per una scelta conveniente delle unità di misura) od una superficie applicabile sulla sfera, e per le figure su di essa varrebbe la geometria sferica.

Una stessa regione della superficie terrestre può esser rappresentata sul piano in diverse *proiezioni* (di Mercatore, stereografica, ecc.); la stessa affermazione vale per una superficie qualsiasi. Due punti vicinissimi A_0, B_0 della superficie avranno per immagini in una prima rappresentazione i punti $A(x, y)$, $B(x + dx, y + dy)$; in una nuova rappresentazione i punti $A'(x', y')$, $B'(x' + dx', y' + dy)$, e così via. La distanza ds dei punti A_0, B_0, sulla superficie sarà espressa in due *proiezioni* diverse dalle formule

$$(10) \quad ds^2 = g_{11} dx^2 + 2 g_{12} dxdy + g_{22} dy^2$$

$$(10') \quad ds^2 = g'_{11} dx'^2 + 2 g'_{12} dx' dy' + g'_{22} dy'^2$$

dove le g sono funzioni di x, y e le g' funzioni di x', y'. I secondi membri delle (10) e (10') devono dare lo stesso valore quando si tenga conto della relazione che passa tra le due proiezioni adoperate. Questa relazione deve esser tale che, dato un punto A della prima *carta*, rimanga determinato senza ambiguità il punto A' corrispondente della seconda carta; e viceversa. Vuol dire che x', y' devono essere funzioni di *x, y*, e le *x, y* funzioni di *x', y'*. Inversamente col dare ad es. *x, y* come funzioni di *x', y'*

$$(13) \quad x = f(x', y'), \qquad y = \varphi(x', y')$$

viene stabilita, in generale, una operazione che permette di trasformare una *carta* di una certa superficie in un'altra *carta* della superficie stessa. Eseguendo la sostituzione (13) sulla espressione (10), che dà la *scala* della prima carta, si ottiene una espressione del tipo (10') che dà la *scala* della seconda carta.

Nota la (10) che definisce una famiglia di superficie applicabili le une sulle altre (pag. 77), e disponendo delle funzioni arbitrarie (13), si possono ottenere infinite espressioni (10') equivalenti alla (10), atte cioè a definire quella stessa famiglia di superficie. La geometria differenziale insegna a riconoscere se due espressioni (10) e (10') assegnate *a priori* sono equivalenti, vale a dire se esiste una trasformazione (13) che permetta di passare dall'una all'altra. Ciò non succede per due espressioni assegnate ad arbitrio; perchè siano equivalenti devono verificarsi certe condizioni che non occorre, per il nostro scopo, precisare.

Conviene chiarire le cose dette con un esempio. Se la superficie data è un piano, esso stesso fornisce la propria carta geografica e la (10) assume l'aspetto

$$(12) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2$$

caratteristico del piano in coordinate cartesiane ortogonali. Accanto alle coordinate cartesiane *x, y* di un punto *A* introduciamo ora le coordinate polari, che sono la distanza *x'* di *A* dall'origine *O* e l'angolo *y'* (misurato in radianti) che l'asse *x* forma colla retta *OA*. Tenendo conto delle formule di trasformazione

$$(13') \quad x = x' \cos(y') \qquad y = x' \sin(y')$$

si verifica che la (12) si muta nella

$$(12') \quad ds^2 = dx'^2 + x'^2 dy'^2$$

Dal nostro punto di vista possiamo riguardare la (12') come atta a fornire la *scala* di una carta geografica del piano primitivo disegnata col rappresentare ogni punto *A* di questo mediante il punto *A'* che ha, sulla *carta*, le coordinate *cartesiane x', y'* uguali alle coordinate polari di *A*. Le due espressioni (12) e (12') sono *equivalenti.* I procedimenti di geometria differenziale, a cui sopra alludevamo, permetterebbero di riconoscere subito questo fatto, senza ricorrere alle considerazioni grafiche esposte or ora. Al contrario la forma (11) (pag. 75) *non* è equivalente alla (12), perchè quella corrisponde a superficie sferiche che non sono applicabili sul piano.

Molte delle osservazioni fatte si estendono alle *molteplicità* o *spazi* a tre o a più dimensioni.

Ricordiamo che nell'ordinaria geometria euclidea la distanza di due punti (*x, y, z*), (*x*+*dx, y*+*dy, z*+*dz*), riferiti a un sistema di coordinate ortogonali, ha per quadrato la espressione, analoga alla (12),

$$(14) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Ora si scriva la formula più generale

$$(15) \quad ds^2 = g_{11}dx^2 + g_{22}dy^2 + g_{33}dz^2 + 2g_{12}dxdy + 2g_{13}dxdz + 2g_{23}dydz$$

dove le g sono sei funzioni assegnate di x, y, z. Alla (15) può essere attribuita l'interpretazione geometrica seguente. Si riguardi lo spazio euclideo Σ come la *carta geografica* a tre dimensioni di una molteplicità a tre dimensioni Σ_0; la *scala* della carta essendo fornita dalla (15). Vuol dire che la distanza di due punti vicinissimi di Σ_0 aventi per immagini i punti (x, y, z) e $(x + dx, y + dy, z + dz)$ di Σ è fornita dalla radice quadrata dell'espressione (15). Con ciò le proprietà geometriche della molteplicità o spazio Σ_0 sono completamente determinate. Lo spazio Σ_0 viene, per dir così, *creato*, insieme alla geometria che gli appartiene, per il solo fatto di averne assegnato l'espressione (15) dell'*elemento lineare ds*. Se la (15) è *equivalente* alla (14), se cioè può mutarsi in questa mediante un'opportuna trasformazione di coordinate, allora nello spazio Σ_0 valgono le proprietà della stereometria euclidea; il detto spazio può considerarsi senz'altro come euclideo. Ciò si verifica se le $g_{11}, \ldots, g_{23}$ soddisfano a certe condizioni che la geometria differenziale sa assegnare. In caso opposto, ed è questo il caso generale, lo spazio Σ_0 è retto da una geometria diversa dalla euclidea. Disponendo della forma (15) si riesce appunto a dimostrare la possibilità logica di infinite geometrie differenti da quella che è a noi familiare.

Si vede di qua la grande importanza di questa concezione, dovuta a Gauss e Riemann, che permette di sostituire al modello geometrico una espressione differenziale come la (10) o la (15). Costruire materialmente una molteplicità a tre dimensioni in cui valga una geometria metrica definita dalla (15) è impossibile, giacchè converrebbe operare entro uno spazio di un maggior numero di dimensioni. Eppure tutte le proprietà di quella molteplicità sono note appena sia data la (15).

Se ci limitiamo agli enti a due dimensioni, la costruzione materiale di una superficie corrispondente ad una data espressione (10) dell'elemento lineare si dimostra possibile purchè sia soddisfatta una certa disuguaglianza ($g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$), ma può presentare difficoltà non lievi ed è spesso superflua. D'altra parte per lo scopo che ci proponiamo interessano proprio espressioni (10) (pag. 74) per le quali quella disuguaglianza non sussiste.

Ricordiamo che nello spazio-tempo di Minkowski ci è convenuto definire il quadrato della distanza di due punti vicinissimi mediante la formula (pag. 58)

$$(16) \quad ds^2 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

ove si è supposta per comodità uguale ad 1 la velocità della luce. In particolare sul piano di Minkowski (y=0, z=0) vale la determinazione metrica

$$(17)\quad ds^2 = dt^2 - dx^2 .$$

Nell'ordine di idee in cui ora ci troviamo, possiamo riguardare il piano di Minkowski come una superficie rappresentata sopra un piano euclideo (carta geografica), il quale è riferito a due assi cartesiani ortogonali x, t. I due punti della *carta* (x, t), $(x + dx, t + dt)$ sono immagini di due punti della superficie la cui distanza ds si ricava dalla (17). Ora una superficie siffatta non potrebbe costruirsi se le distanze su di essa dovessero misurarsi nel modo consueto con un metro inestendibile. Basta notare che alle rette $x = t$ e $x = -t$ della carta vengono a corrispondere sulla superficie linee *i cui archi hanno tutti lunghezza nulla*. Si riesce invece a concepire una superficie di quel tipo se si immagina che l'unità di misura si alteri secondo la direzione. Pensiamo due piani sovrapposti. Sopra uno di essi, piano inferiore, valga la geometria di Euclide, del metro rigido. Sul piano superiore invece l'unità di lunghezza, per ragioni fisiche che non occorre precisare, vari secondo la direzione, e precisamente in modo che segmenti unitari spiccati da uno stesso punto, ad es. dal punto $x = 0$, $t = 0$, abbiano i loro estremi sulla iperbole $t^2 - x^2 = 1$ (fig. 5 di pag. 49). L'osservatore che sta su questo piano non si accorge del cambiamento dell'unità lineare; la variazione apparisce soltanto a chi sta nel piano di sotto e può fare il confronto tra il proprio metro, che egli ritiene rigido, e il metro elastico del suo vicino. Il piano del metro elastico è appunto la superficie, *piano di* MINKOWSKI, definita dall'espressione (17). Su di essa vale la geometria a cui abbiamo già accennato a pag. 57 e seg. Alcune proprietà di questa geometria concordano colle proprietà euclidee, altre si scostano profondamente da queste. Così nel piano di Minkowski la retta segna il *più lungo*, anzichè il più breve cammino tra due suoi punti, e tra i punti stessi esistono infiniti cammini di lunghezza nulla (cfr. pag. 64).

Cose analoghe si ripetono per lo spazio a quattro dimensioni di Minkowski definito dalla espressione (16) dell'elemento lineare. Lo studio del detto spazio rientra dunque come caso molto particolare nell'ordine di ricerche di cui abbiamo ora discorso.

XII.
Esplorazione dello spazio-tempo.

Immaginiamo di trovarci chiusi in una cabina a pareti trasparenti, librantesi nello spazio interstellare. Noi ignoriamo le leggi meccaniche a cui ubbidiscono i corpi dispersi intorno a noi, e, senza preconcetti, vogliamo ricavare queste leggi dalle osservazioni, assumendo per ora l'atteggiamento di puri empiristi. Noi possediamo metri, teodoliti, telescopi, orologi e siamo in grado di compiere le misure che eseguiscono gli astronomi per fissare le due coordinate angolari di un astro sulla volta celeste o per determinare la distanza dell'astro e in conseguenza il tempo che la luce impiega a propagarsi dall'astro a noi. Possiamo dunque caratterizzare la posizione istantanea di ogni astro mediante tre coordinate x, y, z, che siano ad es. due angoli formati dal raggio visuale con due direzioni prestabilite, e la distanza; possiamo inoltre fissare l'istante t in cui l'astro, vagante per il cielo, aveva quella posizione, giacchè basta sottrarre dalla lettura fatta sul nostro orologio nel momento dell'osservazione, il tempo impiegato dalla luce per percorrere la distanza già valutata.

Noi compiamo queste osservazioni ammettendo che valgano nello spazio fisico S (a tre dimensioni) le ordinarie leggi geometriche e fisiche, e ritenendo esatti gli strumenti adoperati. Ma in realtà quelle ipotesi forse non sussistono, gli strumenti possono essere difettosi. Tutto ciò è indifferente per lo scopo nostro purchè sia rispettata *una sola* condizione: a due astri che occupino in uno stesso istante posizioni diverse, o in istanti diversi la stessa posizione, devono appartenere coordinate x, y, z, t e x', y', z', t' differenti almeno per una di esse; in altre parole, le eguaglianze $x = x', y = y', z = z', t = t'$ non possono coesistere se non per due punti che occupino nello stesso istante lo stesso posto. Le osservazioni devono insomma permettere di constatare la coincidenza nello spazio e nel tempo, ma nessun altro dato preciso è per ora ad esse richiesto.

I risultati di queste osservazioni vengono raccolti in un *diagramma o spazio rappresentativo* Σ a quattro dimensioni; sicchè un astro, un punto mobile dello spazio fisico *S*, che abbia le coordinate *x, y, z* nell'istante *t*, vien rappresentato dal punto (*x, y, z, t*) dello spazio Σ.

Dalla nostra cabina noi possiamo anche eseguire esperimenti di meccanica nello spazio fisico *S*. Supponiamo di lanciare fuori della cabina, in ogni istante e in tutte le direzioni, dei corpuscoli, *punti materiali*, e di seguirne i movimenti che rappresenteremo nel nostro spazio Σ, in guisa che per ciascuno di quei punti rimanga tracciata in Σ la *linea oraria*. Poichè non appare nessun vincolo applicato ai detti punti, noi li riguardiamo come *liberi*. Noi veniamo dunque a tracciare in Σ le linee orarie dei punti liberi.

Proviamo a lanciare nello spazio fisico *S*, nello stesso istante *t*, dalla stessa posizione iniziale (*x, y, z*), e colla stessa velocità $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ in grandezza e direzione, due corpuscoli, diversi per volume, caratteri fisici, chimici,...; resteranno essi sempre uniti? La risposta è affermativa se l'esperienza vien fatta stilla Terra, od anche nello spazio interplanetario. Ammettiamo che lo stesso fatto si verifichi nella regione che circonda la nostra cabina. Vuol dire che i sette elementi iniziali $\left(x, y, \ldots, \frac{dz}{dt}\right)$ bastano a determinare completamente la traiettoria di un punto libero in *S*; variando qualcuno di essi, varia naturalmente la traiettoria sotto l'aspetto geometrico o cinematico. Questa proprietà meccanica dello spazio fisico *S*, si traduce subito in una proprietà geometrica delle *linee orarie dei corpi liberi* nello spazio rappresentativo Σ. Da ogni punto (x, y, z, t) di Σ, con una direzione comunque assegnata $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$, esce *una sola* di quelle linee orarie; due linee orarie che si tocchino in un punto coincidono per intero.

Coi mezzi che abbiamo sinora indicato noi siamo in grado, almeno teoricamente, di tracciare nello spazio rappresentativo Σ le linee orarie dei corpi liberi. Noi otteniamo così *una carta geografica a quattro dimensioni* Σ, sulla quale sono disegnate le linee di percorso più interessanti. Di questa carta geografica manca però la *scala*.

Ora noi riusciamo a stabilire la scala purchè i corpi mobili nello spazio fisico *S* soddisfino ad una condizione che potrà sembrare alquanto strana, ma che è concettualmente accettabile. Noi ammettiamo che a ciascun corpuscolo vagante in *S* sia collegato un orologio naturale, ad es. un vibratore, il quale segni il tempo proprio (pag. 42) spettante a quel corpuscolo; il vibratore sia munito ad es. di un contatore, il cui quadrante possa esser letto dalla cabina in cui ci troviamo. Allora dal nostro posto di osservazione siamo in grado di conoscere il tempo proprio *s* che un punto materiale libero, mobile nello spazio *S*, impiega per portarsi dalla posizione $A_0(x, y, z)$ abbandonata nell'istante *t*, alla posizione $B_0(x_1, y_1, z_1,)$ raggiunta all'istante t_1 (essendo i tempi *t* e t_1 valutati sull'orologio della cabina). La traiettoria A_0B_0 del punto mobile in S è raffigurata da un arco AB di linea oraria nello spazio rappresentativo Σ. Orbene noi assumiamo il valore s di quel tempo proprio come lunghezza convenzionale dell'arco AB. In particolare se le due posizioni A_0 e B_0 e i due istanti t, t_1 sono vicinissimi, se dunque x, y, z, t sono le coordinate di A e $x+dx, y+dy, z+dz, t+dt$ quelle di B, noi avremo il modo di dedurre dalle osservazioni la distanza convenzionale ds di A e B. In tal caso sarà anzi inutile nominare la linea oraria lungo la quale la distanza, o il tempo proprio, ds viene valutata, giacchè sappiamo che per due punti infinitamente vicini di Σ passa una sola linea oraria di punto libero.

La distanza convenzionale $AB=ds$ dipende dalle coordinate x, y, z, t di A e dagli incrementi $dx, dy, dz, dt,$ che queste subiscono nel passaggio da A a B. Sulla legge di dipendenza nulla sappiamo; ma considerazioni analoghe a quelle che si fanno in geometria differenziale suggeriscono di accettare come espressione dell'*elemento lineare ds* quella data da una formula del tipo

$$ds^2 = g_{11}dx^2 + g_{22}dy^2 + g_{33}dz^2 + g_{44}dt^2 + 2g_{12}dxdy + \ldots \\ + 2g_{14}dxdt + \ldots + 2g_{34}dzdt\,, \tag{18}$$

dove, a secondo membro, figurano in tutto dieci termini; i dieci coefficienti $g_{11}, \ldots, g_{34}$ sono funzioni di x, y, z, t. Le esplorazioni compiute dalla nostra cabina permettono, in teoria, di determinare i valori delle g in ogni punto di Σ. Basta, a tal fine, lanciare da ogni punto (x, y, z)

dello spazio fisico *S*, in ogni istante *t*, dieci corpuscoli con velocità diverse in valore o direzione ed osservare in corrispondenza dieci tempi propri, per poter scrivere, tenendo presente la (18), dieci equazioni lineari nelle dieci incognite *g*, e poter dedurre quindi i valori di queste nel punto (*x, y, z, t*) (cfr. pag. 76)[19].

Quando i detti coefficienti siano stati valutati in tutti i punti o in un gruppo abbastanza denso di punti della regione esplorata, risulta nota la *scala* della nostra *carta geografica* Σ a quattro dimensioni. La *carta* Σ colla *scala* (18) determina una molteplicità a quattro dimensioni, come un'ordinaria carta a due dimensioni colla relativa scala determina la superficie sovra essa rappresentata (pag. 77). La detta molteplicità è lo *spazio-tempo* dei fenomeni meccanici e fisici che osserviamo dalla nostra cabina. Per non accrescere le notazioni lo indicheremo colla stessa lettera Σ che abbiamo usato sinora per designare la carta; così, nel comune linguaggio, uno stesso nome (Italia, Europa...) vale ad indicare insieme la regione e la carta che la rappresenta.

Lo spazio-tempo definito dalla espressione (18) dell'elemento lineare dipende in apparenza dalla posizione o dal moto della cabina-osservatorio e dalla natura degli

---

19 Sopra una determinazione empirica delle *g*, senza far intervenire il tempo proprio, v. una osservazione del Levi-Civita che trovasi pubblicata nel periodico «l'Elettrotecnica», 1° sem. 1923, ed è riprodotta in una delle aggiunte alla traduzione italiana del libro di A. Kopff, *I fondamenti della relatività Einsteiniana* (U. Hoepli, Milano, 1923).

strumenti adoperati. È bensì vero che altri osservatori diversamente situati, con altri strumenti, troverebbero una diversa espressione

$$(18') \quad ds^2 = g'_{11} dx'^2 + \ldots + 2 g'_{34} dz' dt'$$

dell'elemento lineare. Ma è facile vedere che le due espressioni (18), (18') sono *equivalenti* (pag. 79, 80) trasformabili cioè l'una nell'altra mediante un opportuno cambiamento di coordinate del tipo[20]

$$(19) \quad x = f_1(x', y', z', t'), \ldots, t = f_4(x', y', z', t').$$

Le due espressioni (18) e (18') definiscono quindi uno *stesso* spazio-tempo, come due carte geografiche in proiezioni diverse di una stessa regione definiscono senza ambiguità la stessa parte della superficie terrestre.

In conclusione: il moto dei corpi liberi nello spazio a tre dimensioni che ci circonda basta per determinare, col mezzo di osservazioni opportunamente condotte, il carattere geometrico dello spazio-tempo; questo risulta indipendente dalla posizione dell'osservatore e dagli stru-

---

20 Basta notare a tal fine che punti dello spazio-tempo diversi per i primi osservatori sono anche distinti per i secondi, di guisa che tra le coordinate di uno stesso punto misurate dagli uni e dagli altri devono passare relazioni del tipo (19). Poichè, d'altra parte, il tempo proprio di un punto mobile non dipende dagli osservatori, ma vien letto dagli uni o dagli altri sopra uno *stesso* orologio naturale annesso al punto, la (18) stabilita dai primi osservatori e la (18') a cui pervengono i secondi devono fornire lo stesso valore di *ds*, quando si tenga conto della trasformazione (19).

menti di cui egli fa uso. Di fronte alla relatività dei dati empirici raccolti in diverse condizioni di moto sorge dunque un *assoluto*, lo spazio-tempo, il quale rappresenta in modo invariante il complesso dei fenomeni meccanici o fisici che si svolgono nello spazio cadente sotto i nostri sensi. La indagine geometrica dello spazio-tempo deve tradursi, secondo la concezione di Einstein, nella ricerca delle leggi fisiche dell'universo.

XIII.
L'inerzia come caso particolare della gravitazione.

L'esplorazione dello spazio-tempo ci ha condotto alla determinazione dell'espressione (18) o dei suoi coefficienti g. Con ciò il compito dell'osservatore è esaurito per quanto riguarda il moto dei corpi liberi. La parola spetta ora al matematico il quale deve discutere la (18) e trarne le conseguenze più importanti.

Il matematico ricorda anzitutto che, sotto condizioni meccaniche particolarmente semplici, che noi riteniamo verificarsi a grande distanza dalla materia, il moto dei corpi liberi è rettilineo uniforme, rispetto ad opportuni sistemi di riferimento (*sistemi galileiani*), ed il corrispondente spazio-tempo ha le proprietà messe in luce dal Minkowski. Se quelle condizioni si verificano realmente nello spazio fisico da noi esplorato, e la cabina-osservatorio è un sistema galileiano, noi dobbiamo trovare, in luogo della (18), una espressione come questa

$$(20)\quad ds^2 = dt^2 - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right),$$

e le linee orarie dei punti liberi devono esser rette.

Se invece, delle due ipotesi ora fatte sussiste solo la prima, mentre la cabina non si trova nelle condizioni privilegiate suddette, la esplorazione condurrà non già alla (20), bensì ad una forma (18) *equivalente* alla (20). La prima questione che si presenta al matematico è dunque di decidere se la (18), a cui l'osservatore perviene, possa trasformarsi nella (20) mediante un opportuno cambiamento delle coordinate. Ora la geometria differenziale sa stabilire le condizioni a cui devono soddisfare i dieci coefficienti g della (18) perchè la trasformazione possa eseguirsi. Queste condizioni sono di natura complicata e non occorre per i nostri scopi scriverle qui. Supponiamo che siano verificate; supponiamo anzi che nelle nuove coordinate, che entrano nella (20), le linee orarie dei punti liberi, già segnate sulla *carta geografica* Σ, soddisfino ad equazioni lineari

$$x = a_1 t + b_1 \quad , \quad y = a_2 t + b_2 \quad , \quad z = a_3 t + b_3$$

Allora possiamo concludere che lo spazio-tempo a cui siamo pervenuti mediante le osservazioni è lo spazio di Minkowski, e in esso le linee orarie dei punti liberi sono rette.

Nello spazio fisico esplorato vale in tal caso la legge di inerzia nella sua forma classica: tutti i punti liberi percorrono rette con moto uniforme. Questa proprietà così semplice poteva non esser subito apparsa agli esploratori della cabina: ciò derivava dal fatto che il loro osservatorio non costituiva un sistema galileiano, o che i loro strumenti subivano alterazioni di cui essi non si erano accorti. Poteva la cabina esser trascinata da un vortice, senza che le persone racchiuse se ne avvedessero, per effetto di qualche causa compensatrice; potevano il metro e l'orologio esser turbati da qualche fenomeno fisico inavvertito da chi li adoperava. In entrambi i casi un moto uniforme rispetto ad un sistema galileiano non sarebbe apparso tale all'esploratore. Ma i sussidi della geometria differenziale permetterebbero di accorgersi, a calcoli fatti, delle condizioni anormali dell'osservatorio o degli strumenti, quando pure altri fenomeni (forza centrifuga,...) non avessero già richiamato l'attenzione dell'esploratore.

Non si deve credere che le condizioni idealmente semplici di cui ora abbiamo discorso si verifichino ordinariamente; esse costituiscono solo un caso limite che non si riscontrerà mai esattamente. Se ad es. la cabina-osservatorio fosse situata entro il nostro sistema planetario, poniamo fra Marte e Giove, un corpo lanciato e lasciato libero diverrebbe un asteroide e descriverebbe un'orbita intorno al Sole. La curva sarebbe, con grande approssimazione, una conica per un osservatore in quiete rispetto al Sole; essa rivestirebbe un'altra forma se l'osservatore fosse, a sua insaputa, trascinato da qualche movimento. Ma le traiettorie non apparirebbero rettilinee per nessun sistema di riferimento. Nello spazio interplanetario non esistono sistemi galileiani in senso rigoroso: il corrispondente spazio-tempo è irriducibile allo spazio di Minkowski, e la espressione (18) dell'elemento lineare a cui perviene un osservatore situato in quella zona non è trasformabile nella espressione (20).

Orbene, ogni qual volta la esplorazione di una regione dello spazio conduce ad una forma (18) irriducibile alla forma di Minkowski, noi diremo che ivi esiste un *campo gravitazionale*. Noi riteniamo insomma che lo spazio-tempo, il quale avrebbe i caratteri segnalati dalla relatività speciale dove non esiste materia, assuma, in vicinanza della materia, proprietà geometriche sostanzialmente diverse. Lo spazio-tempo *si incurva* per la presenza della materia. Ma è questo, in verità, un semplice modo di dire. La deformazione dello spazio, che in certi punti può assumere tali proporzioni da colpire direttamente i nostri sensi (ad es. colla impenetrabilità), è il fatto matematico o fisico rivelato dalle osservazioni; noi lo interpretiamo dicendo che in quei punti esiste materia.

Qualunque sia la natura dello spazio-tempo, qualunque sia la espressione (18) a cui le osservazioni conducono, sorge la questione di stabilire il significato geometrico delle linee orarie che, nello spazio-tempo, rappresentano il moto dei punti liberi. Queste linee devono potersi determinare quando siano noti i coefficienti *g* della espressione (18), ma evidentemente non devono dipendere dalle coordinate impiegate, cioè dalla posizione dell'osservatore e degli strumenti di cui egli fa uso. Esse devono corrispondere ad una proprietà intrinseca dello spazio-tempo, indipendente dalla rappresentazione che ne fu fatta; come, sulla superficie dell'oceano, le linee preferite per la navigazione non possono dipendere dalla proiezione in cui è disegnata la carta idrografica. Ora, in uno spazio curvo a quattro dimensioni, linee aventi proprietà intrinseche sono le *geodetiche* che segnano (secondo il tipo dell'espressione (18)) il minimo o il massimo cammino tra due loro punti. Le geodetiche condividono colle linee orarie suddette una particolarità già segnalata a proposito di queste: per un dato punto passa una sola di quelle linee avente una direzione assegnata ad arbitrio. A queste analogie un'altra se ne aggiunge: nel caso particolare che la (18) convenga allo spazio di Minkowski, anzi sia ridotta alla forma (20), le linee orarie dei punti liberi sono rette e quindi coincidono colle geodetiche di quello spazio, linee di *massimo* percorso come già fu notato (pag. 64).

D'altra parte lo spazio-tempo di un campo gravitazionale, entro una regione sufficientemente piccola, può in prima approssimazione riguardarsi come spazio di Minkowski. L'esempio dell'ascensore cadente portato a pag. 73 giustifica questa affermazione sotto l'aspetto meccanico; mentre dal punto di vista geometrico basta por mente all'analogia colle ordinarie superficie, sulle quali un'area abbastanza piccola circondante un punto può approssimativamente esser sostituita dall'area proiezione sul piano ivi tangente[21].

Tutte queste ragioni, insieme ad altre tolte dalla meccanica razionale, che qui sarebbe troppo lungo riportare, ci inducono a ritenere che *le linee orarie dei punti materiali liberi coincidano colle geodetiche dello spazio-tempo,* cioè colle linee di massimo percorso tra due loro punti non troppo discosti.

È questo un vero postulato che si è costretti ad introdurre, quando si segua la via da noi prescelta; ed è anzi l'unico postulato essenziale che comparisce[22]. Le osser-

21 Sotto l'aspetto analitico la questione si presenta così. Quando io abbia scelto un particolare punto $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$, nello spazio-tempo per cui vale la determinazione metrica (18), i coefficienti g di questa assumono in esso dieci valori numerici particolari $\bar{g}_{11}, \bar{g}_{34}$. Ora è sempre possibile, mediante una opportuna trasformazione lineare di coordinate, mutare una forma quadratica a *coefficienti costanti* $\bar{g}$ in una somma algebrica di quadrati dei nuovi differenziali. Poichè d'altra parte lo spazio-tempo (18) nell'intorno di un suo punto deve avere proprietà fisiche che si riattacchino per continuità a quelle dello spazio di Minkowski, si prevede che i segni dei quadrati dei differenziali in quella somma algebrica saranno proprio i segni della (20) (uno positivo e tre negativi). Lo spazio-tempo corrispondente si può riguardare come *tangente* allo spazio-tempo (18) nel punto $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$. In relazione a quei segni, la linea oraria geodetica è linea di massimo, anzichè di minimo percorso.

22 Le altre ipotesi di cui si è fatto uso nella esplorazione dello spazio-tempo sono le seguenti:

vazioni astronomiche, di cui poi dovremo discorrere, faranno vedere che le conseguenze del postulato sono, d'accordo coi fatti.

Se si ricorda che la lunghezza di un arco di linea oraria esprime un intervallo di tempo proprio (pag. 61), il nostro postulato dà luogo alla seguente interpretazione fisica. Nello spazio fisico a tre dimensioni S si considerino due punti materiali mobili, i quali abbandonino insieme una posizione A_0 e raggiungano insieme una posizione B_0. Dei due punti mobili il primo sia libero, il se-

---

1) *Ipotesi del moto libero*. – Si ammette che nello spazio a tre dimensioni cadente sotto i nostri mezzi di osservazione il moto dei punti materiali, che diciamo liberi, dipenda esclusivamente dalle condizioni cinematiche iniziali (posizione, istante, velocità vettoriale).

2) *Ipotesi del tempo proprio*. – Si ammette che a ciascun punto materiale possa pensarsi annesso un orologio il quale segni il tempo proprio relativo al punto; e si ammette che due orologi annessi a due punti che viaggino uniti segnino lo stesso intervallo di tempo fra le stesse due posizioni (iniziale e finale) dei detti punti. Si ammette però che gli orologi spettanti a due punti (di cui uno almeno non libero), i quali partano insieme da una stessa posizione ed arrivino insieme ad una seconda posizione seguendo vie diverse, segnino, in generale, intervalli diversi. Questo fatto si verifica realmente nella meccanica di Einstein, ma non nella meccanica classica.

3) *Ipotesi sulla forma dell'elemento lineare*. – Si ammette che l'intervallo infinitesimo di tempo proprio ds tra due posizioni successive di un punto mobile sia espresso dalla radice quadrata di una espressione omogenea di secondo grado negli incrementi dx, dy, dz, dt subìti dalle coordinate del punto mobile.

condo si muova soggetto a qualche vincolo. Orbene il tempo proprio impiegato dal primo punto per passare da A_0 a B_0 supera il tempo proprio spettante al secondo punto mobile, perchè delle due linee orarie corrispondenti la prima è geodetica, ma non la seconda.

Si può quindi trasportare ad un qualsiasi campo gravitazionale la forma che abbiamo dato alla legge di inerzia nello spazio di Minkowski (pag. 65).

Di più punti materiali che partano insieme da una stessa posizione ed arrivino insieme ad una stessa posizione, impiega il massimo tempo proprio quel punto che si muove di moto libero.

Va però avvertito che (come succede generalmente nei problemi di massimo o minimo) la proposizione può cadere in difetto se l'intervallo di tempo proprio tra le due posizioni iniziale e finale supera un certo limite dipendente da una di queste posizioni[23].

In questa estensione della legge di inerzia, dal caso puramente astratto ed irrealizzabile per il quale fu inizialmente enunciata, allo spazio ove si muovono i corpi

23 Ad es. il tempo proprio che la Terra impiega a descrivere la sua orbita intorno al Sole, movendosi di *moto libero* nel campo gravitazionale solare, è *minore*, anzichè maggiore, del tempo proprio trascorso per un osservatore fisso sull'eclittica, e quindi *vincolato,* il quale riscontri due passaggi successivi della Terra (pag. 66). Affinchè la proprietà di massimo si verifichi è necessario, a quanto pare, prender in esame due posizioni della Terra che distino meno della metà dell'orbita, nel qual caso l'intervallo di tempo proprio non supera sei mesi.

celesti, risiede una delle maggiori conquiste della nuova meccanica. L'edifizio grandioso elevato da Einstein appare ora nella sua piena luce.

Il corpuscolo che nello spazio vuoto prosegue il suo movimento rettilineo ed il pianeta che descrive una ellisse intorno al Sole non ubbidiscono, come ritiene la meccanica classica, a due leggi diverse (legge di inerzia, e legge di Keplero-Newton). In entrambi i casi le linee orarie dei punti mobili sono geodetiche del rispettivo spazio-tempo. Questo afferma la legge di Einstein che riassume la teoria dell'inerzia e la teoria della gravitazione. Ma mentre nel primo spazio-tempo le geodetiche sono rette, nel secondo, deformato dal campo solare, sono curve; dalle proprietà geometriche di queste si deducono le particolarità geometriche e cinematiche delle orbite dei corpi attratti dal Sole.

Con questa sintesi la meccanica raggiunge una mirabile unità. Inerzia e gravitazione costituiscono un unico fenomeno che è la manifestazione, non di una forza, ma dello stato geometrico dello spazio-tempo. Le proprietà singolari del campo gravitazionale, di cui abbiamo discorso a pag. 70 e che distinguono questo campo da ogni altro campo di forze, vengono chiarite dalla nuova teoria, o almeno ricondotte alle proprietà dell'inerzia che erano da noi riguardate come caratteri fisici primordiali.

Il passaggio dalle geodetiche rettilinee alle geodetiche curvilinee per l'intervento di masse attraenti può esser illuminato dall'esempio seguente che ha solo il valore di uno schema atto a fissar l'attenzione.

Immagini il lettore di rappresentare lo spazio-tempo vuoto mediante un piano, le cui geodetiche sono naturalmente rette. Supponiamo ora che in un punto *O* del piano nasca un centro di attrazione. Per effetto di questo il piano si deforma. Le rette del piano uscenti da *O* subiscono una dilatazione, fortissima in vicinanza di *O*, e decrescente versa la periferia, come se quelle rette fossero fili metallici intensamente riscaldati nei loro estremi raccolti in *O*; al contrario i cerchi di centro *O* conservano inalterati i loro perimetri, come se fossero costituiti da fili inestendibili. In conseguenza di questa parziale dilatazione il tessuto, piano in origine, si incurva ed assume la forma di una tromba ad asse rettilineo (*tuba*). Su questa superficie non esistono rette, e le geodetiche sono curve o giacenti in piani per l'asse (curve meridiane), o attorcigliate a spira. Se un punto mobile è costretto, da qualche causa fisica, a descrivere una geodetica della superficie, esso, che si moveva in linea retta quando il centro di attrazione non esisteva, dovrà dopo la creazione di questo descrivere una curva.

Nello spazio-tempo, come abbiamo detto, la linea oraria di un corpuscolo libero è una geodetica. Per deviarlo da questo cammino naturale, per costringerlo a seguire una nuova linea oraria, che non sarà più in generale geodetica, occorre esercitare uno sforzo. Perciò adattando alla nuova meccanica la definizione newtoniana, potrà chiamarsi *forza* ogni causa la quale distolga un corpo dalla linea oraria geodetica che esso, senza quella causa, avrebbe seguìto. Naturalmente la gravitazione non figura qui tra le forze.

Se un disco di massa trascurabile è fatto ruotare con velocità costante intorno al suo asse, un punto della periferia, ove fosse libero e situato a grande distanza da materia, avrebbe per linea oraria, nello spazio-tempo di Minkowski, una retta; legato com'è al disco ammette invece per linea oraria un'elica tracciata sopra un cilindro rotondo. La forza che altera la linea oraria è in questo caso la coesione che vincola il punto al disco e si oppone, secondo il linguaggio della meccanica classica, alla forza centrifuga.

Lo spazio vuoto di materia è in verità un'astrazione, priva di senso fisico. Se esiste materia, le geodetiche dello spazio-tempo sono determinate da questa. In tal senso è giusto dire che la forza centrifuga dipende dalla materia diffusa nello spazio e varia di intensità e direzione secondo la distribuzione di questa.

Non si può, a stretto rigore, parlare di rotazione *assoluta* di un corpo; la rotazione è un fenomeno che il corpo presenta in relazione al complesso dei corpi celesti sparsi nello spazio.

XIV.
Caratteri dello spazio-tempo gravitazionale.

La esplorazione che noi supponiamo di aver eseguita ad es. nello spazio interplanetario può essere concettualmente proseguita in altre regioni, ove domini l'attrazione di stelle doppie o multiple, di nebulose, ecc. Se potessimo compiere queste osservazioni, noi ricaveremmo una immensa raccolta di dati che si presterebbe per lo studio empirico dei vari tipi di spazio-tempo determinati dalla materia. Il confronto permetterebbe di scoprire le proprietà comuni a questi tipi. Si vedrebbe così che gli spazi-tempi gravitazionali hanno certi caratteri metrici traducentesi in particolarità della espressione dell'elemento lineare; mentre altri tipi di ds^2, pur teoricamente possibili, non si presentano in natura. In corrispondenza, potremmo scoprire per questa via empirica le leggi del moto dei corpi immersi in un campo gravitazionale.

Ma pur ammettendo che la via indicata potesse esser seguìta, noi arriveremmo, nelle ipotesi più favorevoli, ad un risultato comparabile a quello che nella scienza classica raggiunse Keplero quando fu in grado di enunciare le sue celebri leggi sul moto dei pianeti. Resterebbe ancora da compiere un secondo passo, puramente teorico, che permettesse di dedurre le leggi empiriche da un unico principio, e conducesse ad una scoperta analoga a quella che ha reso immortale il nome di Newton.

La costruzione della teoria classica della gravitazione iniziata da Newton, proseguita da Laplace, Gauss, Poisson, costituisce ancor oggi un modello mirabile di rigore e di eleganza, sebbene la critica ispirata dalle nuove vedute abbia rivelato la necessità di precisare certi concetti fondamentali (distanza, tempo,...) sui quali poggia quella costruzione. Come è ben noto, Newton, seguendo le norme del metodo induttivo, esamina anzitutto il caso di un solo centro attraente e fa vedere come dalle leggi di Keplero segua che i pianeti sono attratti dal Sole con una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Se i centri di attrazione sono parecchi, od anche infiniti, si presenta il problema della composizione delle forze che provengono da essi. A tale scopo si è riconosciuto particolarmente utile di introdurre, al posto della forza, il *potenziale*, cioè una funzione delle coordinate del punto attratto, la cui derivata secondo una direzione qualsiasi dà la relativa componente della forza. Questa funzione, come hanno dimostrato i continuatori di Newton, soddisfa ad una classica equazione alle derivate parziali del secondo ordine. Nello studio dell'equazione è contenuta, si può dire, tutta la teoria della gravitazione, sotto la forma che essa aveva assunto nel secolo scorso.

Come deve esser modificato questo procedimento per tener conto dei concetti introdotti dalla relatività generale?

Volendo seguire lo stesso ordine si presenterebbe anzitutto il problema di determinare l'elemento lineare di uno spazio-tempo relativo ad un solo centro di attrazione. Facili considerazioni geometriche fanno vedere che il detto spazio-tempo ha la simmetria di un cilindro a tre dimensioni rotondo intorno ad un asse rettilineo, che è la linea oraria del centro attraente. Questa configurazione geometrica impone al quadrato dell'elemento lineare la forma seguente:

$$(21)\quad ds^2 = Adt^2 - \frac{1}{c^2}\left(Bdr^2 + r^2 d\theta + r^2 sen^2 \theta d\varphi^2\right)$$

dove r, θ e φ e sono coordinate analoghe alle polari nello spazio a tre dimensioni t = cost.; t è il tempo segnato da un conveniente orologio; A e B sono due funzioni ancora incognite di r, che le considerazioni geometriche non bastano a determinare. Occorrerebbe a tal fine tener conto delle leggi del moto dei corpi soggetti all'attrazione centrale. Se si accettassero come rigorose le leggi di Keplero, nelle quali le distanze e i tempi fossero convenientemente precisati, si avrebbe il modo di determinare quelle due funzioni A e B.

Einstein procede altrimenti e porta alla scienza la scoperta che le leggi di Keplero, anche nel caso astratto di una massa puntuale attraente, sono soltanto approssimate. Egli adotta il metodo deduttivo e segue il cammino inverso di quello che Newton e i suoi continuatori avevano tenuto. È il caso generale, di una massa comunque distribuita, che egli considera in primo luogo. Nella meccanica classica, come già dicemmo, questo caso dà luogo alla teoria del potenziale newtoniano. Einstein si propone di adattare la eletta teoria alla concezione dello spazio-tempo gravitazionale. Da buon razionalista egli si fa guidare da considerazioni puramente matematiche e lascia momentaneamente da parte i fatti astronomici, coi quali, solo alla fine, i risultati teorici saranno posti a raffronto.

Si tratta dunque di stabilire *a priori* le condizioni alle quali devono soddisfare i dieci coefficienti *g* dell'espressione dell'elemento lineare, affinchè questa possa convenire allo spazio-tempo determinato da un campo gravitazionale.

Occorre però qui precisare la questione. Assegnata ad arbitrio una espressione del tipo

$$(18)\quad ds^2 = g_{11}dx^2 + \ldots + g_{44}dt^2 + \ldots + 2\,g_{34}dzdt\,,$$

ove *x, y, z, t* sono quattro variabili, di cui non importa conoscere il significato geometrico o fisico, e le *g* sono dieci funzioni di esse, rimane determinata la geometria metrica di uno spazio a quattro dimensioni. Appena sia soddisfatta una certa condizione qualitativa, a cui fu già accennato nella nota a pag. 96 [nota 21 di questa edizione elettronica], il detto spazio può riguardarsi come spazio-tempo relativo ad un certo campo gravitazionale. Le geodetiche di quello rappresentano traiettorie di punti di uno spazio fisico *S* a tre dimensioni, moventisi per effetto di attrazioni (o repulsioni) dovute a masse variabili, opportunamente distribuite nello spazio *S*.

Ma i campi gravitazionali che maggiormente interessano, perchè meglio si prestano ad osservazioni e misure, vengono prodotti da masse che in ogni istante possono esser racchiuse entro una superficie; questa poi, al variare del tempo, genera un *tubo* a tre dimensioni che separa le dette masse dal resto dello spazio-tempo. In questa ipotesi la metrica dello spazio-tempo in ogni punto esterno al tubo deve esser determinata dalle condizioni che si verificano nello spazio interno[24]. In altre parole: i coefficienti g della espressione (18) sono noti in ogni punto dello spazio-tempo quando siano noti in una regione limitata di esso.

Questa forma di determinazione delle g conduce a prevedere che le dieci funzioni g di x, y, z, t soddisfano ad un sistema di dieci equazioni alle derivate parziali, delle quali equazioni, data la scelta arbitraria del sistema di coordinate $x, y, z, t,$ sei sole devono risultare indipendenti, essendo le altre quattro conseguenze di queste. Sulla natura delle dette equazioni si può anzi dire qualche cosa di più. Si supponga che nello spazio fisico S a tre dimensioni siano note le posizioni e intensità delle masse attraenti quando un certo orologio segna un determinato istante, ad es. $t = 0$, e siano ancora note in grandezza e direzione le velocità da cui quelle masse sono animate nel detto istante. Le masse continuano ormai in modo perfettamente determinato il loro moto per effetto del campo che esse stesse generano, e quindi lo spazio-tempo a cui esse danno luogo può dirsi noto in base a

24 Forse anche dalle sole condizioni che sussistono sulla superficie, a tre dimensioni, del tubo; vi è qui un problema matematico di esistenza che credo non sia stato ancora risolto.

quelle condizioni iniziali. Vuol dire che i dieci coefficienti g dell'espressione (18) sono determinati senza ambiguità per ogni valore di t, quando per $t = 0$ si conoscano i valori delle g e delle loro derivate parziali $\frac{\partial g}{\partial t}$. Segue che le g, considerate come funzioni di t (per x, y, z costanti) soddisfano ad un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine, lineari nelle derivate seconde. Ma poichè le quattro variabili x, y, z, t nella meccanica relativistica si comportano nello stesso modo, ciò che ora fu detto per t si ripete per le altre tre coordinate. Si arriva così alla prima condizione che Einstein ha imposto alle equazioni del campo gravitazionale

1. *I dieci coefficienti g della espressione dell'elemento lineare atto a definire un campo gravitazionale devono soddisfare ad un sistema di dieci equazioni alle derivate parziali del secondo ordine, lineari nelle derivate seconde. Tra queste equazioni devono passare quattro relazioni identicamente soddisfatte, tali da far sì che sei sole delle dieci equazioni siano tra loro indipendenti.*

Una seconda condizione è senz'altro evidente. Il sistema delle dette equazioni deve esprimere una particolarità geometrica intrinseca dello spazio-tempo, non una particolarità del sistema di coordinate di cui si fa uso. Vuol dire che, se si parte da quelle equazioni scritte in un sistema generico di coordinate x, y, z, t, e si opera su di esse la più generale trasformazione di coordinate (19) (pag. 90), si arriverà ad equazioni aventi la *identica* forma delle primitive, salvo lo scambio di x, y, z, t con x', *y’, z’, t’* e dei coefficienti *g* della (18) coi cofficienti *g’* della (18) (pag. 90). La condizione si enuncia così:

2. *Le dieci equazioni a derivate parziali devono avere carattere invariante rispetto alla più generale trasformazione di coordinate.*

Una terza condizione viene accolta in forma provvisoria da Einstein. Egli ha introdotto in una prima fase delle sue ricerche la ipotesi seguente[25]:

3. *Lo spazio-tempo ha estensione infinita in tutti i sensi, e a distanza infinita dalla materia esso gode le proprietà che caratterizzano lo spazio di Minkowski* (vale, cioè, la relatività ristretta).

Ora è notevole il fatto che le tre condizioni sopra enunciate bastano a determinare le dieci equazioni differenziali a cui devono soddisfare i coefficienti *g* dell’espressione (18). Queste equazioni costituiscono nella nuova teoria l’analogo della unica equazione a cui soddisfa il potenziale newtoniano. Perciò le *g* vengono dette da Einstein *potenziali gravitazionali*.

Non è possibile qui riportare quelle dieci equazioni senza diffondersi in chiarimenti intorno al significato dei simboli di cui si fa uso; nè si riesce, in poche parole,

---

25 Lo sviluppo della teoria ha poi condotto Einstein ad ammettere l’ipotesi opposta che lo spazio fisico t = cost., pur essendo illimitato, abbia dimensioni finite, mentre il tempo t varia da $-\infty$ a $+\infty$. Su questa ed altre ipotesi consimili non ci tratteniamo nel presente opuscolo, perchè esse non possono esser chiarite senza lunghe digressioni, e perchè le ragioni portate a loro sostegno ci sembrano ancora discutibili.

a spiegarne il significato geometrico. Basterà dire che le equazioni stesse permettono, almeno in teoria, di calcolare i dieci coefficienti g quando si forniscano tali dati fisici da render determinato il campo gravitazionale.

XV.
La teoria di Einstein e la legge di Newton.

In un caso la risoluzione del problema è stata condotta fino alle ultime conseguenze; è il caso più semplice e più interessante che si presenta quando vi sia un unico centro di attrazione. Abbiamo già detto che allora la espressione del ds^2 deve avere, per ragioni geometriche, la forma (21) (pag. 104). Restavano ancora da determinare due funzioni incognite A e B della coordinata r. La integrazione delle equazioni gravitazionali di Einstein permette di compiere questo passo e conduce alla forma definitiva (di Schwarzschild)

(22)
$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2 \theta d\varphi^2\right)$$

Qui m è una costante che è legata all'intensità del campo ed ha quindi l'ufficio che la misura della massa attraente aveva nella meccanica newtoniana. Il suo valore, in un caso concreto, può solo esser stabilito dalle osservazioni sul moto dei corpi soggetti al campo. Per il campo solare, del quale ci occupiamo, si trova, nel modo che poi esporremo, m = km 1,47; m ha, come r, la dimensione di una lunghezza.

Prima di trarre dalla (22) le conseguenze a cui essa conduce è opportuno veder chiaramente i significati delle quattro coordinate t, r, θ e φ. Queste ultime due intanto sono le ordinarie coordinate angolari polari nello spazio fisico t = cost.; precisamente è θ l'angolo che la retta congiungente il centro del Sole col punto attratto (pianeta) forma con una retta fissa uscente da quello, mentre φ è l'angolo formato dal piano delle due rette con un piano fisso passante per la retta fissa[26].

Allo scopo di chiarire il significato di t osserviamo che per un orologio in quiete rispetto al Sole ($dr = d\theta = d\varphi = 0$) il tempo proprio ds è dato dalla

$$ds = \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}\, dt$$

a cui la (22) si riduce in questa ipotesi. La r, come vedremo tra un momento, esprime approssimativamente la distanza del punto considerato, cioè l'orologio, dal Sole. Risulta dunque che a distanza infinita dal Sole, t coinci-

---

26 Se il centro attraente cadesse nel centro della Terra e la retta fissa coincidesse coll'asse di rotazione di questa, θ misurerebbe il complemento della latitudine, e φ la longitudine.

de col tempo proprio *s*. In pratica *t indica il tempo proprio segnato da un orologio a grandissima distanza dal Sole*, situato ad es. sulla Terra o sopra uno dei pianeti esterni.

Consideriamo ora due punti infinitamente vicini che si trovino in uno stesso istante *t* sopra uno stesso raggio uscente dal Sole. Delle quattro differeuze *dr, dt, dθ*, *dφ* tra le coordinate omonime dei due punti, sono nulle le ultime tre, mentre la prima è legata al corrispondente valore di *ds* dalla relazione

$$-c^2 ds^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}}$$

conseguenza della (22).

Ricordiamo che nella relatività ristretta una espressione analoga a quella che apparisce a primo membro dell'ultima formula fu definita come il quadrato della *distanza propria* di due punti (pag. 44), cioè della distanza misurata da un osservatore che si trovi in quiete con essi. Anche nelle ipotesi più larghe in cui ora ci troviamo, è questa la sola definizione di distanza che abbia carattere invariante, cioè indipendente dal sistema di coordinate[27]. Indicando dunque con *dl* la distanza pro-

27 Resta però da stabilire entro quali limiti la distanza così definita coincida colla distanza qual'è valutata dagli astronomi per mezzo di triangolazioni celesti. Il buon accordo tra queste due determinazioni della distanza sembra, almeno in un caso, confermato dalla coincidenza tra i due valori della distanza della Terra dal

pria dei due punti infinitamente vicini allineati col Sole, avremo

$$dl = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}}$$

Si vede che *dl* e *dr* coincidono praticamente se r è molto grande. E si deduce con facile calcolo che la distanza (propria) di due punti anche lontani situati sopra una semiretta uscente dal centro del Sole e corrispondenti ai valori r_0 ed $r_1 > r_0$ del parametro r è, con ottima approssimazione, $r_1 - r_0$, se r_0 è abbastanza grande (superiore ad es. a 1000 km., cioè ad un settecentesimo del raggio solare). *Si può dunque assumere r come valore grandemente approssimato della distanza di un punto dal centro del Sole, purchè il punto sia sufficientemente lontano, per es. esterno al Sole.*

Per punti vicini r ed l possono differire in modo notevole, ed anzi per $r \leq 2m$ = km. 2,94 l'ultima formula perde significato; il centro del Sole costituisce in ogni istante una singolarità dello spazio-tempo.

Comunque sia, per brevità di linguaggio chiameremo r il raggio vettore del punto preso in esame.

Premessi questi chiarimenti indispensabili ritorniamo alla formula (22) dell'elemento lineare. Conosciuto questo, la ricerca delle geodetiche dello spazio-tempo è un

---

Sole dedotti con mezzi ottici (Roemer) o trigonometrici.

problema puramente matematico; d'altra parte, come è noto (pag. 97), le proprietà delle geodetiche si traducono subito nelle proprietà del moto dei corpi soggetti al campo gravitazionale cioè dei pianeti. La discussione del problema fa vedere anzitutto che l'orbita di un pianeta è piana, e può supporsi contenuta, senza introdurre restrizioni, nel piano $\theta=\frac{\pi}{2}$. Lo studio ulteriore conduce a scrivere tra le variabili rimanenti (r, φ, t od s) le due relazioni

$$(23)\quad r^2\frac{d\varphi}{ds}=h\,,$$

$$(24)\quad \frac{d^2u}{d\varphi^2}+u-3\,mu^2=\frac{c^2m}{h^2}$$

dove h è una costante, e dove si è posto $u=\frac{1}{r}$. La (24), come diremo tra un momento, determina la forma geometrica dell'orbita, mentre la (23) fissa la velocità angolare con cui l'orbita vien descritta.

Poichè $r^2d\varphi$ è il doppio dell'area descritta dal raggio vettore r nel tempo proprio ds, almeno nell'ordine di approssimazione in cui r rappresenta la distanza dal Sole, concludiamo dalla (23) che vale la seconda legge di Keplero, salvo il cambiamento del tempo assoluto newtoniano nel *tempo proprio* relativo al pianeta:

L'area descritta dal raggio vettore è proporzionale al tempo proprio impiegato a descriverla.

Per giudicare l'importanza della (24) si tenga presente che l'equazione differenziale dell'orbita a cui conduce la legge di attrazione di Newton è

$$(24') \quad \frac{d^2\varphi}{du^2}+u=\frac{4\pi^2 a^3}{h^2 T^2}$$

dove *a* è il semiasse maggiore dell'orbita ellittica di un pianeta, *T* è il periodo (tempo di una rivoluzione), *h* è la costante delle aree newtoniane che non differisce sensibilmente dalla quantità indicata colla stessa lettera nella (23), ed *u* è il valore inverso della distanza dal Sole. Se si fa astrazione dal terzo termine della (24) e non si dà peso al significato leggermente diverso delle lettere adoperato, le due formule (24) e (24') coincidono purchè si ponga

$$(25) \quad m=\frac{4\pi^2 a^3}{c^2 T^2}=1{,}49\,km.$$

valore già sopra indicato e indipendente dal pianeta prescelto, in virtù della terza legge di Keplero. Introdotto questo valore di *m* nella (24), si vede che il terzo termine del primo membro è estremamente piccolo in confronto agli altri due[28]. Trascurandolo, in via approssimata, si cade nella (24') e si ritrova la prima legge di Keplero:

I pianeti descrivono ellissi aventi un fuoco nel Sole.

Ora questa conclusione ha una importanza immensa e fornisce una conferma della concezione di Einstein, a

---

28 Per la Terra, ad es., il rapporto del terzo al secondo è inferiore a 10^{-7}.

mio parere, più convincente delle tre prove di cui dovremo poi discorrere e alle quali si attribuisce tanto peso. Si ricordi infatti che la nuova teoria della gravitazione è fondata su considerazioni astratte, di carattere matematico, ove la fisica interviene soltanto grazie al principio del determinismo che porta a prevedere il tipo di certe equazioni differenziali (pag. 106). Quella teoria potrebbe esser costruita anche da chi ignorasse completamente le leggi empiriche che regolano il moto dei pianeti. Orbene, partendo da queste basi astratte, Einstein arriva alla conseguenza che, almeno in prima approssimazione, i pianeti si muovono secondo le leggi di Keplero[29], le quali sinora si son dimostrate in ottimo accordo colle osservazioni. È questo uno dei maggiori trionfi che la scienza pura abbia riportato nella indagine delle leggi della natura.

XVI.
Le tre prove astronomiche della relatività.

Il trionfo si accentua se nella equazione (24) (pag. 113) si tien conto anche del termine trascurato un mo-

---

29 La terza legge (costanza del rapporto $a^3:T^2$) è già contenuta nella formula (25) poichè risulta che lo stesso valore di m nella (24) conviene a tutti i pianeti.

mento fa. Si vede allora che l’orbita non è esattamente una ellisse, di orientazione immutabile, ripercorsa in ogni periodo dal pianeta, come affermava la teoria classica. L’orbita ha la forma della curva che descriverebbe un punto il quale si muovesse secondo le note leggi lungo una ellisse, mentre questa ruotasse di un piccolo angolo, nel verso del moto e nel proprio piano, intorno al fuoco situato nel Sole. Due perieli successivi del pianeta (punti di minima distanza dal Sole) non si trovano dunque situati sullo stesso raggio vettore, ma su due raggi formanti l’angolo

$$\frac{24\pi^3 a^2}{c^2\left(1-e^2\right)T^2}$$

dove e è l’eccentricità dell’orbita considerata.

Quest’angolo è troppo piccolo per poter essere misurato direttamente, ma col ripetersi dei periodi gli effetti si accumulano e possono dare dopo un secolo una variazione accessibile alle osservazioni. La variazione è sensibile specialmente per il pianeta Mercurio in causa della maggiore eccentricità e della brevità del periodo; essa raggiunge il valore di 43" al secolo.

Ora le osservazioni avevano effettivamente rivelato, già da lungo tempo, uno spostamento del perielio di Mercurio che ammontava a circa 600" al secolo, nel senso previsto dalla teoria della relatività. La discussione teorica delle perturbazioni che il moto di Mercurio subisce per effetto degli altri pianeti aveva dato ragione di una buona parte di questa anomalia. Rimaneva, secondo i calcoli dell'astronomo Newcomb (1898), una differenza inesplicata di circa 42". Questo valore si accorda nel modo più soddisfacente con quello previsto dalla teoria di Einstein; la quale, si noti, non introduce, come altri tentativi di spiegazione, delle cause speciali agenti su Mercurio, ma assegna una legge generale a cui tutti i pianeti devono ubbidire. L'accordo resterebbe anche buono se una nuova discussione delle osservazioni astronomiche o del calcolo delle perturbazioni costringesse a modificare di qualche secondo il risultato di Newcomb. Sarebbe tuttavia desiderabile che discussioni analoghe venissero fatte per gli altri pianeti o per qualcuno dei satelliti che meglio si prestano a questa ricerca, ad es. per il 5° satellite di Giove, come ha proposto il nostro Armellini.

Ad una seconda verifica dà luogo la (24). Abbiamo già detto in altra occasione che la luce, per quanto riguarda la legge cinematica della propagazione nel vuoto, si comporta come un corpo materiale animato dalla stessa velocità. Ne viene che un raggio luminoso proveniente da una stella deve descrivere la stessa orbita di un pianeta che partisse da distanza grandissima colla velocità di 300000 km. al secondo; l'orbita non sarebbe certo rettilinea se il pianeta passasse accanto al Sole. L'orbita è data sempre dalla (24) (pag. 113), dove però questa volta è nullo il termine noto (a secondo membro), giacchè il tempo proprio ds per un orologio che si muove colla velocità della luce è sempre nullo, e quindi h, dalla (23), risulta infinita. Integrando in tale ipotesi la (24) si trova che la traiettoria di un raggio luminoso ha presso a poco la forma di un ramo di iperbole, concavo verso il Sole, i cui asintoti formano un angolo che differisce pochissimo da un angolo piatto. La differenza, espressa in radianti, vale approssimativamente $\frac{4m}{R}$, dove R è la distanza tra il centro del Sole e il punto più vicino della detta traiettoria. Ora quest'angolo acuto, $\frac{4m}{R}$, ha un significato fisico notevole. Si supponga che il raggio luminoso provenga da una stella lontanissima S e colpisca un osservatore T situato dall'altra parte del Sole a grande distanza da questo; basta ad es. che l'osservatore si trovi sulla Terra. La direzione secondo cui la stella è vista da T è la tangente al raggio luminoso in T, cioè, presso a poco, uno degli asintoti del ramo iperbolico; mentre la direzione secondo cui la stella sarebbe vista da T, se il Sole non vi fosse, è la retta TS parallela all'altro asintoto. Il nostro angolo dà dunque la deviazione che il raggio visuale della stella subisce per causa del campo gravitazionale solare. Se il raggio luminoso rasenta il Sole, R vale circa 697000 km. e la deviazione angolare, tradotta in gradi, risulta uguale a 1"75. Per piccolo che sia quest'angolo esso è accessibile agli strumenti astronomici. Però le osservazioni di stelle vicine al Sole non possono farsi che durante gli eclissi solari. Fu appunto in occasione dell'eclisse del 29 maggio 1919 che due spedizioni inglesi poterono verificare il fenomeno mediante il confronto di fotografie di una stessa zona del cielo eseguite durante l'eclisse o quando il Sole era lontano dal campo osservato. Le verifiche riuscirono soddisfacenti, tenuto conto degli inevitabili errori dovuti alla piccolezza delle deviazioni che si trattava di constatare. Altri risultati si attendono dall'eclisse del 21 settembre 1922, le cui fotografie non furono ancora sottoposte a confronto[30]. Se questi risultati riusciranno d'accordo colle previsioni, forniranno una nuova conferma della teoria della relatività, la quale sarà riuscita a prevedere, anche quantitativamente, un fenomeno ottico che non era sinora sospettato[31].

---

30 Mentre correggo le bozze di stampa giungono le prime notizie sulle osservazioni fatte nel settembre scorso in Australia dalle missioni scientifiche del Canadà e dell'Osservatorio Lick di California. Le fotografie di oltre 80 stelle vicine al Sole rivelano deviazioni che, ridotte all'orlo del Sole, danno il valore medio di 1"74, inferiore alla previsione teorica di solo un centesimo di secondo! Il risultato non potrebbe essere più soddisfacente. Si noti a questo proposito che attribuendo massa all'energia raggiante, come impone la teoria elettromagnetica della materia, anche la legge di Newton avrebbe condotto a prevedere una deviazione del raggio luminoso, raggiungente però soltanto 0"87. Si può dunque dire che le osservazioni confermano, almeno su questo punto, la correzione portata dall'Einstein alla legge di Newton. (Maggio 1923)

31 L'obbiezione che l'incurvamento del raggio sia dovuto a rifrazione si respinge osservando che per spiegare il valore della deviazione occorrerebbe attribuire alla regione che circonda il Sole una densità di gran lunga superiore a quella che è compatibile con altri fenomeni aventi luogo nella regione stessa (assorbi-

Dalla formula (24) dell'elemento lineare Einstein ha dedotto una terza conseguenza della teoria che si presta a verifiche sperimentali.

Abbiamo già stabilito a pag. 110 la relazione che passa tra il tempo proprio *ds* di un orologio a distanza *r* dal Sole, e il tempo *dt* segnato da un orologio a distanza infinita od anche, praticamente, situato sulla Terra, che per un tempo breve può supporsi in quiete rispetto al Sole. Se il primo orologio sta sulla superficie solare, e si indica con *R* il raggio del Sole, quella relazione diventa

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{1-\frac{2m}{r}}=1-\frac{m}{R}+...$$

Fatto il calcolo coi noti valori di *m* e di *R* si trova che mentre per l'orologio terrestre passa un secondo, il tempo trascorso per l'orologio solare differisce in meno da quello di 0^s,000002. Il campo gravitazionale rallenta l'andamento degli orologi.

Per procedere ad una verifica si assuma come unità di tempo di un orologio naturale la durata (*periodo*) della vibrazione di una determinata radiazione dello spettro. La maggior durata sul Sole che sulla Terra porta di conseguenza uno spostamento verso il rosso della riga dello spettro solare paragonata colla riga dello stesso elemento di una luce terrestre; di questo spostamento si può facilmente calcolare la grandezza. Ora le osservazioni ri-

mento insensibile della luce, resistenza trascurabile opposta al moto delle comete, ecc.).

petute per le righe di vari elementi hanno dato, inizialmente, risultati incerti, il che non può sorprendere quando si pensi che si tratta di effetti piccolissimi e che varie altre cause fisiche, ed in particolare la pressione sotto cui si trova l'elemento considerato, influiscono sulla posizione delle righe nello spettro. Le determinazioni più recenti fatte da Perot e da Fabry e Buisson con elementi chimici che meno degli altri subiscono l'effetto della pressione sembrano confermare, anche numericamente, la previsione di Einstein.

XVII.
Valore della nuova teoria.

Quale importanza dobbiamo attribuire a queste conferme sperimentali? Le opinioni degli scienziati in proposito sono discordi. Mentre taluni riguardano quelle prove come clamorosi trionfi della concezione di Einstein, altri rimangono ancora diffidenti. Questi ultimi, tra i quali parecchi cultori di scienze sperimentali o di osservazione, domandano se valga la pena di abbandonare o sconvolgere il grandioso edifizio della meccanica newtoniana per accogliere una teoria che ha al suo attivo, essi dicono, verifiche discutibili di fenomeni delicatissimi, i quali possono trovare altre spiegazioni più conformi alle vedute classiche. Per lo meno, essi aggiungono, è necessario attendere l'esito di nuove osservazioni e nuovi calcoli intorno ai fenomeni di cui abbiamo discorso e ad altri che vedute teoriche conducessero a prevedere. Solo il moltiplicarsi delle conferme basterebbe a scuotere il loro scetticismo, mentre la smentita a qualche previsione della teoria dovrebbe, secondo essi, determinare il crollo definitivo della costruzione relativistica.

Certamente noi dobbiamo tutti augurarci che astronomi e fisici con crescente attività collaborino per verificare quelle conseguenze della teoria di Einstein che possono esser sottoposte al controllo sperimentale, e dobbiamo esser prudenti finchè un materiale sufficiente non sia raccolto. Ma non conviene, d'altra parte, esagerare il valore di prove, sia favorevoli, sia contrarie. Un secolo fa si soleva affermare che una sola smentita offerta dai fatti bastasse a distruggere una teoria. Oggi la moderna critica scientifica ci impone una maggiore cautela.

Ogni teoria scientifica è fondata sopra numerose ipotesi di cui solo alcune vengono esplicitamente enunciate e discusse. Quando poi la previsione teorica è sottoposta alla osservazione o all'esperienza, altre ipotesi si aggiungono riguardanti l'uso degli strumenti, le correzioni da introdursi nei risultati bruti per trasformarli in risultati scientifici, ecc. Una eventuale discordia tra la teoria e le osservazioni colpisce nel suo insieme il blocco delle ipotesi teoriche e sperimentali; ma non bastano nè una nè più osservazioni fatte sullo stesso fenomeno per isolare le ipotesi che vanno abbandonate dalle altre che possono essere conservate. Nemmeno moltiplicando i fenomeni si riesce talvolta a separare le une ipotesi dalle altre, perchè in svariatissimi modi può esser corretta la teoria in guisa da trovarsi d'accordo colle osservazioni; e la scelta tra questi modi può dipendere da ragioni non strettamente scientifiche.

Sopra altri criteri è fondata la fiducia che desta una teoria scientifica. La teoria è tanto più solida, quanto più numerosi sono i fatti che essa spiega riconducendoli, senza artifizi, a pochi principi, quanto più notevoli sono i fatti nuovi che essa prevede, i fenomeni o le leggi che essa riesce a collegare in una unica veduta. Ora sotto questo aspetto poche teorie possono competere colla concezione di Einstein.

Delle sintesi a cui essa conduce abbiamo già accennato a qualcuna, di somma importanza. Abbiamo già detto che le leggi della meccanica e dell'elettromagnetismo, anzi dell'intera fisica, sono invarianti di fronte ad uno stesso tipo di trasformazioni, fondamentali per la relatività, ciò che non aveva luogo nella scienza classica (pag. 32).

Abbiamo visto che la gravitazione e l'inerzia costituiscono un'unica proprietà universale (pag. 99), ed il mistero che avvolgeva la prima di queste forze viene svelato o almeno ricondotto ad una questione geometrica sulla forma dello spazio-tempo. Fisica e Geometria tendono a riunirsi; nelle indagini sui fondamenti di una di queste scienze non si può più fare astrazione dall'altra, come aveva affermato settanta anni or sono la mente profetica di Riemann.

Se il programma che ci siamo imposti nel redigere questo scritto non ce lo impedisse, potremmo parlare di altre sintesi che la relatività ha stabilito ma che indagini fisiche di natura diversa avevano suggerito. La massa e l'energia costituiscono un solo ente; un recinto chiuso acquista maggior massa se vien riscaldato, e ne perde coll'irraggiamento. La energia della luce è pesante e ciò spiega sotto un nuovo aspetto perchè la luce sia deviata da un campo gravitazionale. Massa ed energia dipendono nello stesso modo dalla velocità di cui sono animate rispetto all'osservatore che le misura. Le leggi della conservazione della massa e della conservazione dell'energia si fondono insieme, ed entrambe si uniscono in un solo enunciato col principio della conservazione della quantità di moto.

Vi è un'altra ragione, che oserei dire storica, la quale ci induce ad accogliere con fiducia la teoria della relatività. La scienza, sebbene il profano ne dubiti, procede in un senso nettamente determinato, che appare chiaro a chi ne osservi la evoluzione secolare e sorvoli sulle inevitabili incertezze temporanee. La scienza cerca di estendere ogni giorno il suo dominio sopra una regione più vasta dell'universo. Se le nozioni acquistate dall'uomo primitivo interessano solo la piccola tribù di cui egli fa parte, sorge ben presto una scienza terrestre le cui dottrine riguardano tutti gli abitanti del mondo allora conosciuto. Le nozioni antropomorfiche, di cui le dottrine dell'era antica sono imbevute, la posizione privilegiata attribuita al nostro pianeta, cadono in gran parte con Copernico. Il Sole diventa allora il centro dell'universo, ma viene spodestato più tardi coll'estendersi della scienza del cielo e colla scoperta di stelle più grandi dell'astro che ci illumina.

Ora è appunto nella stessa direzione che procede la teoria di Einstein. Essa ferisce le ultime vestigia antropomorfiche che ci restavano. La misura del tempo era ancora legata col nostro pianeta o col mondo solare; un unico orologio batteva il tempo a tutto l'Universo. Einstein ci dimostra che questa idea deve essere abbandonata, che ad ogni corpo vagante nel cielo spetta un tempo proprio.

Al sistema di riferimento, fisso sulla Terra, dell'antica meccanica, Newton aveva sostituito un sistema di assi uscenti dal centro del Sole e diretti alle stelle fisse. È questo il sistema privilegiato della meccanica classica; era solo permesso di sostituirlo con un sistema in moto di traslazione uniforme rispetto a quello, a meno di non introdurre complicazioni rilevanti nello studio matematico dei fenomeni. Colla *relatività generale* sparisce questo privilegio dei sistemi galileiani. Le formule della meccanica, scritte in coordinate generali, sono invarianti di fronte a qualsiasi trasformazione di coordinate. Ciò non toglie che nell'intorno di un punto non possa convenire di scegliere qualche particolare sistema di coordinate, il quale dia alle espressioni matematiche dei fenomeni che avvengono in quell'intorno la forma più semplice; tale sarebbe ad es., per lo studio del mondo dei pianeti, il sistema suggerito da Newton. Ma non possiamo pretendere che questo sistema sia pure il più comodo per le regioni dello spazio situate a immense distanze dal Sole. Così nello studio geometrico di una superficie può esser utile, quando si esamini l'intorno di un punto, riferirci ad assi cartesiani situati nel piano ivi tangente; ma se si vuole indagare la superficie nella sua integrità questo sistema non serve, e si deve ricorrere a sistemi generali di coordinate.

La teoria di Einstein dà la più larga veduta che sinora si sia raggiunta o tentata dell'universo, di cui la nostra Terra o il sistema planetario occupano un'infima parte. L'audacia di questo tentativo, il successo che sembra accompagnarlo colmano la nostra mente di ammirazione e ci danno fiducia che la nuova dottrina troverà sede definitiva nella scienza.

Ma pur chi voglia rinunziare a far previsioni deve riconoscere che per la grandiosità delle idee a cui le nuove vedute si ispirano, per il movimento intellettuale che da esse ha avuto origine, la teoria della relatività costituisce una delle maggiori tappe nella storia del pensiero umano.